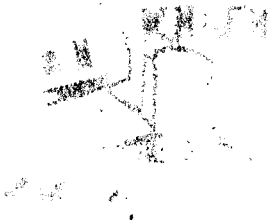
Популярные лекции
по математике

Ю. А. ШАШКИН

# ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА



ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 58

Ю. А. ШАШКИН.

# ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.
1984

22.15
Ш 32
УДК 513

**Шашкин Ю. А.**

Ш 32 Эйлерова характеристика.— М.: Наука, 1984.— 96 с.— (Популярные лекции по математике.) — 15 к.

В брошюре доказываются знаменитая формула Эйлера для выпуклых многогранников и ее аналоги для других фигур (плоскости, пространства, многоугольников). Эти формулы естественно подводят читателя к понятию эйлеровой характеристики. Даются два ее определения и доказывается их равносильность. Рассказывается о роли эйлеровой характеристики в различных геометрических задачах: о разбиении плоскости и пространства, о вычислении площадей, о покрытиях сферы.

Брошюра рассчитана на школьников старших классов, студентов младших курсов и всех любителей математики.

Ш $\frac{1702040000-165}{053(02)-84}$ 156—84

ББК 22.15
513

Рецензент
доктор физико-математических наук *В. Г. Болтянский*

Ш $\frac{1702040000-165}{053(02)-84}$ 156—84

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1984

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Крупнейший математик XVIII века Леонард Эйлер (1707—1783) родился в швейцарском городе Базеле. С двадцатилетнего возраста он жил в Петербурге, в Берлине, потом снова в Петербурге. Эйлер сыграл выдающуюся роль в развитии математики, механики, физики и техники. Он был пионером научных исследований по математике в России.

В 1758 г. Л. Эйлер опубликовал в «Записках Петербургской академии наук» доказательство формулы

$$В - Р + Г = 2, \qquad (0.1)$$

связывающей число вершин В, число ребер Р и число граней Г произвольного выпуклого многогранника.

Предлагаемая брошюра посвящена формуле Эйлера (0.1), а также ее различным аналогам и приложениям. Пусть, например, на плоскости имеется конечное семейство прямых, которые пересекаются в некотором числе В точек («вершин») и разбивают плоскость на Г штук «граней», а сами разбиваются вершинами на Р штук «ребер». Тогда оказывается, что

$$В - Р + Г = 1. \qquad (0.2)$$

Подобно тому, как формула (0.1) верна для любого выпуклого многогранника, формула (0.2) верна для любого семейства прямых на плоскости и не зависит ни от их числа, ни от их взаимного расположения.

Вообще, замечательный факт состоит в том, что если задана какая-то фигура (из некоторого определенного класса), то, как бы мы ни разбивали ее на части (грани, ребра и вершины), определенным образом «примыкающие» друг к другу, знакопеременная сумма $В - Р + Г$, называемая эйлеровой характеристикой фигуры, сохраняет постоянное значение.

В первой части этой брошюры (§§ 1—7) вычисляются эйлеровы характеристики прямой, плоскости, трехмерного пространства, многоугольников разных классов, границ выпуклых многогранников. В § 4 и § 5 даны приложения эйлеровой характеристики к вычислению площади многоугольника и суммы его внешних углов.

Во второй части брошюры (§§ 8—12) эйлерова характеристика фигуры (например, многоугольника) определяется аксиоматически, как «аддитивная функция» этой фигуры. В этом отношении она похожа на площадь многоугольника. Чтобы найти площадь объединения двух многоугольников, нужно, как известно, из суммы их площадей вычесть площадь их пересечения. Это и есть свойство аддитивности площади. Одна из аксиом эйлеровой характеристики требует, чтобы она обладала аналогичным свойством. Вторая аксиома (а именно, аксиома «нормировки») различает площадь и характеристику. «Нормировка» первой из этих двух функций многоугольника требует, чтобы площадь единичного квадрата была равна единице. Эйлерова характеристика «нормируется» так, что она равна единице на каждом выпуклом многоугольнике.

В § 9 доказывается существование эйлеровой характеристики, удовлетворяющей заданным аксиомам, а в § 10 — равносильность двух различных ее определений. Заключительный § 12 содержит приложения эйлеровой характеристики к некоторым задачам комбинаторной геометрии — нового направления математики, с которым читатель может познакомиться, например, по книгам [2], [5], [6] (цифры в квадратных скобках относятся к списку литературы, помещенному на с. 94).

В брошюре ничего не говорится о топологической инвариантности эйлеровой характеристики и вообще о ее роли в топологии. Читатель сможет почерпнуть сведения об этом из книги В. Г. Болтянского и В. А. Ефремовича [1].

За помощь в работе над книжкой автор благодарит И. Я. Гусака и А. Г. Нетребина.

*Ю. А. Шашкин*

## § 1. ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Простейший вариант формулы Эйлера возникает при разбиении прямой $L$ на части конечным множеством точек. Если выбрать на прямой В штук точек, то они разбивают ее на $В-1$ отрезков и два луча, т. е. всего на $В+1$ частей. Обозначив число этих частей через Р, имеем

$$В-Р=-1. \tag{1.1}$$

Это и есть *формула Эйлера* для прямой. Она показывает, что разность $В-Р$ постоянна, т. е. не зависит ни от числа выбранных точек, ни от их расположения, и выражает, таким образом, свойство самой прямой.

Перейдем теперь к плоскости $Q$ и попытаемся получить для нее формулу Эйлера, аналогичную формуле (1.1). Для плоскости этот вопрос сложнее и интереснее, чем для прямой: ведь разбиение теперь осуществляется конечным семейством прямых, а эти прямые могут располагаться на плоскости различными способами. Например, две прямые могут либо пересекаться, либо быть параллельными. Для трех прямых имеется четыре случая взаимного расположения: все три прямые параллельны; две прямые параллельны, а третья пересекает их; каждая пара прямых имеет общую точку, но не существует точки, общей для всех трех; все три прямые проходят через одну точку. Различные случаи расположения четырех прямых изображены на рис. 1; их словесное описание было бы затруднительно. Можно было бы рассмотреть расположения пяти, шести и т. д. прямых; с ростом числа прямых быстро возрастает число различных способов их расположения.

Каждое семейство прямых разбивает плоскость на части, называемые *гранями разбиения;* их число мы будем обозначать буквой Г. *Вершинами разбиения* называются точки пересечения данных прямых, а *ребрами разбиения* — части, на которые прямые делятся вершинами.

Число вершин и число ребер разбиения обозначим соответственно буквами В и Р. Разбиение может не иметь ни одной вершины (и тогда $В=0$); это будет в том и только в том случае, когда каждые две прямые параллельны. Ребрами такого разбиения естественно считать сами прямые.

Оказывается, что числа В, Р и Г связаны между собой соотношением

$$В-Р+Г=1. \qquad (1.2)$$

Это — *формула Эйлера* для плоскости; она показывает, что знакопеременная сумма $В-Р+Г$ постоянна, т. е. не

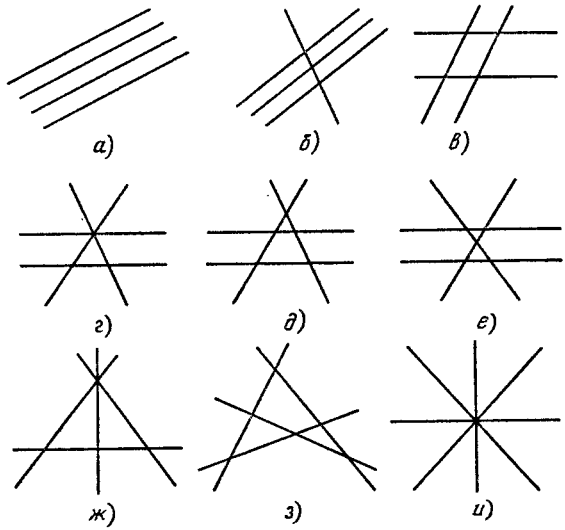



Рис. 1

зависит ни от числа прямых, разбивающих плоскость, ни от их взаимного расположения. Следовательно, формула Эйлера выражает свойство самой плоскости $Q$.

Докажем формулу (1.2) для разбиения, которое дают $n$ прямых; предварительно сделаем несколько замечаний.

Во-первых, в случае, когда разбиение не имеет вершин, формула (1.2) очевидна, так как тогда $В=0$, $Р=n$ и $Г=n+1$.

Во-вторых, докажем следующую лемму, которая окажется полезной и в других случаях.

Лемма 1. *Если на плоскости задано конечное число прямых, то можно провести новую прямую, не параллельную ни одной из данных.*

Доказательство. Действительно, пусть заданы прямые $L_1, \ldots, L_m$, и пусть $O$ — какая-нибудь точка на прямой $L_1$. Проведем через $O$ прямую $L_i' \| L_i$ $(i=2, \ldots, m)$, и пусть $\varphi_i$ обозначает угол между прямыми $L_1$ и $L_i'$, причем можно считать, что $0 \leqslant \varphi_i \leqslant 90°$. Если $\varphi_i = 0$ для всех $i$, т. е. если все заданные прямые параллельны между собой, то искомой будет любая прямая, не параллельная $L_1$. В противном случае среди этих углов выберем наименьший положительный; пусть это будет, например, $\varphi_2$. Прямая $L$, проходящая через точку $O$ и образующая с $L_1$ положительный угол, меньший $\varphi_2$, является искомой. Лемма 1 доказана.

В-третьих, чтобы доказать формулу (1.2), мы должны найти выражения для двух из трех величин В, Р и Г, предполагая третью величину известной. Пусть известно число вершин В (и, конечно, число прямых $n$). Оказывается, однако, что числа Г и Р не определяются числами $n$ и В однозначно. Например, разбиения *в)* и *ж)* (рис. 1) имеют по одинаковому числу вершин $В = 4$, но разные числа граней и ребер. Глядя на эти разбиения, можно заметить, что они различаются «строением» вершин: в разбиении *в)* через каждую вершину проходят две прямые, а в разбиении *ж)* имеется вершина, через которую проходят три прямые. Чтобы учесть это различие, введем следующее определение. *Кратностью* вершины разбиения назовем число проходящих через нее прямых данного семейства. Таким образом, кратность любой вершины есть натуральное число, не меньшее двух. Естественно ожидать, что числа Г и Р определятся, если, кроме $n$ и В, считать заданными еще и кратности всех вершин. Мы увидим, что это действительно так.

Подсчет ребер и граней разбиения проведем методом «движущейся» прямой.

Пусть $L_1, \ldots, L_n$ — заданные прямые и $A_1, \ldots, A_В$ — вершины разбиения (рис. 2; на этом рисунке $n=5$ и $В=7$). Проведем через *каждую* пару вершин вспомогательную прямую; обозначим эти прямые через $M_1, \ldots, M_k$. Среди них находятся, конечно, и все заданные прямые $L_1, \ldots, L_n$. (На рис. 2 «лишние» вспомогательные прямые, т. е. отличные от прямых $L_1, \ldots, L_n$, не изображены, чтобы не загромождать его; читатель проверит, что их следовало бы провести через пары точек $A_1A_5$, $A_2A_5$, $A_2A_7$, $A_3A_4$ и $A_6A_7$.)

Теперь, пользуясь леммой 1, проведем воспомогательную прямую $L_0$, не параллельную ни одной из прямых $M_1, \ldots, M_k$. Будем предполагать, что прямая $L_0$ расположена, во-первых, горизонтально, во-вторых, «ниже» всех вершин $A_1, \ldots, A_B$. Отсюда следует, что для каждой пары вершин $A_i$ и $A_j$ их расстояния от прямой $L_0$ различны *). В дальнейшем этот факт будет выражаться словами «все вершины лежат на разной высоте», причем имеется в виду их высота над уровнем прямой $L_0$. Будем предполагать, что вершины занумерованы в порядке возрастания высоты, т. е. пусть $A_1$ — самая нижняя вершина, $A_2$ лежит выше,

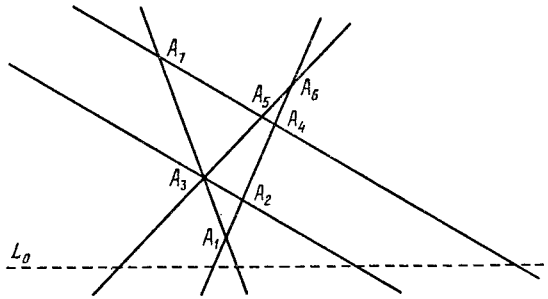



Рис. 2.

чем $A_1$, но ниже, чем $A_3$, и т. д., наконец, $A_B$ — самая верхняя вершина.

«Движущаяся» прямая $L$ будет располагаться горизонтально, совпадая в своем начальном положении с прямой $L_0$ и поднимаясь затем от нее вверх по плоскости. Прямую $L$ можно использовать для подсчета ребер разбиения: так как она пересекается со всеми прямыми $L_1, \ldots, L_n$, и притом с каждой из них в «своей» отдельной точке, то в начальном положении она встречает $n$ ребер. Теперь заставим прямую $L$ подниматься вверх по плоскости параллельно самой себе. До тех пор, пока она не встретит самую нижнюю вершину $A_1$, число пересекаемых ею ребер останется неизменным и равным $n$. После перехода через вершину $A_1$ это число изменится: появятся новые ребра, число которых равно кратности $\alpha_1$ вершины $A_1$.

*) Действительно, если $A_i$ и $A_j$ находятся на одинаковом расстоянии от прямой $L_0$, то прямая, проходящая через эти вершины, будет параллельна $L_0$. Однако этого не может быть по построению $L_0$.

Поэтому общее число ребер, встреченных к этому моменту прямой $L$, станет равным $n+\alpha_1$ и останется таким до встречи со следующей вершиной $A_2$. Если эта последняя имеет кратность $\alpha_2$, то после перехода $L$ через $A_2$ число ребер, уже встреченных к этому моменту, снова увеличится и станет равным $n+\alpha_1+\alpha_2$ и т. д. Наконец, после перехода через последнюю, самую верхнюю, вершину $A_в$ кратности $\alpha_в$ это число станет равным $n+\alpha_1+\alpha_2+\ \ldots\ +\alpha_в$. Итак, общее число ребер разбиения равно

$$Р=n+\alpha_1+\alpha_2+\ \ldots\ +\alpha_в,$$

или, в более краткой записи,

$$Р=n+\sum_{i=1}^{в}\alpha_i. \tag{1.3}$$

Число граней разбиения найдем следующим образом. В начальном положении прямая $L$ делится прямыми $L_1, \ldots, L_n$ на $n+1$ частей; каждая из этих частей лежит в своей, ей соответствующей грани разбиения и поэтому «засчитывает» эту грань. Значит, прямая $L$ в начальном положении встречает $n+1$ граней, и это число не меняется, пока она не поднимется до вершины $A_1$. После прохождения через $A_1$, как мы видели, появляются новые ребра в числе $\alpha_1$. Ясно, что число новых граней, встреченных при этом прямой $L$, будет равно $\alpha_1-1$ *). Поэтому общее число граней, встреченных к этому моменту, будет равно $1+n+\alpha_1-1$. После прохождения через вершину $A_2$ это общее число увеличивается на $\alpha_2-1$ и т. д.; наконец, когда $L$ пересечет последнюю, самую верхнюю, вершину $A_в$, общее число граней еще увеличится на $\alpha_в-1$. Поэтому

$$Г=n+1+(\alpha_1-1)+(\alpha_2-1)+\ \ldots+(\alpha_в-1),$$

или

$$Г=1+n+\sum_{i=1}^{в}(\alpha_i-1)=1+n+\sum_{i=1}^{в}\alpha_i-\sum_{i=1}^{в}1=$$

$$=1+n-в+\sum_{i=1}^{в}\alpha_i. \tag{1.4}$$

*) Эти новые грани заключены между $\alpha_1$ новыми ребрами.

Здесь $\sum_{i=1}^{B} 1$ обозначает сумму единиц, взятую по всем вершинам разбиения и поэтому равную B.

Итак, мы выразили число ребер и число граней через число вершин и их кратности. Из формул (1.3) и (1.4) видно, между прочим, что числа P и Г зависят только от суммы кратностей и не зависят, например, от порядка, в котором они появляются. Теперь из (1.3) и (1.4) немедленно получается формула Эйлера

$$B-P+\Gamma=B-n-\sum_{i=1}^{B}\alpha_i+1+n-B+\sum_{i=1}^{B}\alpha_i=1.$$

Заметим, что доказательство этой формулы можно упростить, если не стараться получить явное выражение

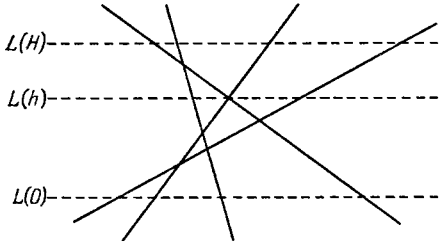



Рис. 3.

для чисел P и Г. А именно, пусть все вершины разбиения лежат внутри горизонтальной полосы шириной $H$ (рис. 3). Обозначим через $L(0)$ нижнюю границу этой полосы, т. е. прямую $L$ в ее начальном положении, через $L(H)$ — верхнюю границу полосы, т. е. прямую $L$ в ее заключительном положении, и через $L(h)$ — прямую $L$, расположенную на расстоянии $h$ от $L(0)$. Пусть $P(h)$ обозначает число ребер, уже встреченных движущейся прямой $L$ к тому моменту, когда она занимает положение $L(h)$; аналогичный смысл имеют обозначения $B(h)$ и $\Gamma(h)$. Величины $P(h)$, $B(h)$ и $\Gamma(h)$ меняются в зависимости от $h$; нам надо доказать, что их знакопеременная сумма $S(h)=B(h)-P(h)+\Gamma(h)$ принимает значение 1, когда $h=H$. Если $h=0$, то, как мы видели, $B(h)=B(0)=0$, $P(0)=n$, $\Gamma(0)=1+n$, и поэтому $S(0)=1$. При прохождении пря-

мой $L$ через вершину $A_i$ число $\mathrm{P}(h)$ увеличивается на $\alpha_i$, $\Gamma(h)$ увеличивается на $\alpha_i - 1$, а $\mathrm{B}(h)$ увеличивается на 1, поэтому $S(h)$ не изменяет своего значения. В частности, $S(H) = 1$, что и требовалось доказать.

### Задачи

**1.** Докажите, что при любом разбиении прямой конечным числом В точек сумма $\mathrm{B} + \mathrm{P}$ нечетна.

**2.** Докажите, что при любом разбиении плоскости конечным числом прямых сумма $\mathrm{B} + \mathrm{P} + \Gamma$ нечетна.

**3.** Говорят, что прямые на плоскости находятся в *общем положении*, если никакие две из них не параллельны и никакие три из них не имеют общей точки. Докажите, что для любого натурального числа $n$ на плоскости существует $n$ прямых общего положения.

**4.** Покажите, что если разбиение плоскости осуществляется $n$ прямыми общего положения, то

$$\mathrm{P} = n^2, \quad \Gamma = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}.$$

**5.** Докажите формулу Эйлера (1.2) методом движущейся прямой в предположении, что эта прямая параллельна одной или нескольким прямым семейства.

**6.** Для семейства прямых общего положения докажите формулу Эйлера методом математической индукции по числу прямых.

**7.** Плоская фигура называется *ограниченной*, если она лежит в круге некоторого (может быть, и очень большого) радиуса, и *неограниченной* — в противном случае. Найдите число $\mathrm{P}_1$ ограниченных ребер (т. е. отрезков) и число $\mathrm{P}_2$ неограниченных ребер (т. е. лучей), а также число $\Gamma_1$ ограниченных граней и число $\Gamma_2$ неограниченных граней для разбиения плоскости, имеющего вершины. Покажите, что

$$\mathrm{B} - \mathrm{P}_1 + \Gamma_1 = 1.$$

**8.** Ясно, что разбиение плоскости всегда имеет неограниченные грани и неограниченные ребра. Когда оно имеет ограниченные грани (ограниченные ребра)?

## § 2. ЧТО ТАКОЕ ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА?

Формулы Эйлера для прямой и плоскости, доказанные в § 1, являются проявлением следующего общего замечательного факта. Пусть Ф — фигура, разбитая каким-то образом на части, которые мы будем называть *вершинами, ребрами* и *гранями*. Обозначим число вершин, число ребер и число граней разбиения

соответственно через В, Р и Г. Для всех частей разбиения будет еще использоваться объединяющее название: *клетки*, т. е. вместо слов «грани, ребра и вершины разбиения» будем говорить короче «клетки разбиения». Оказывается, что независимо от способа разбиения фигуры Ф на клетки знакопеременная сумма $В-Р+Г$ сохраняет постоянное значение, или, иначе говоря, является инвариантной (т. е. неизменной) относительно способа разбиения. Эта сумма называется *эйлеровой характеристикой* фигуры и обозначается греческой буквой $\chi$ (читается «хи»). Таким образом, по определению

$$\chi(Ф)=В-Р+Г.$$

Как было показано выше, эйлерова характеристика прямой равна $-1$, а плоскости — равна 1.

В знакопеременной сумме $В-Р+Г$, определяющей эйлерову характеристику, порядок слагаемых не случаен: он зависит от *размерности* клеток, соответствующих этим слагаемым. Иначе говоря, В обозначает число нульмерных клеток разбиения, т. е. клеток, имеющих размерность, равную нулю; Р обозначает число одномерных и Г— число двумерных клеток. Заметим, что нульмерные клетки (или вершины) — это точки, одномерные клетки (или ребра) чаще всего являются прямолинейными отрезками, а двумерные клетки (грани) — выпуклыми многоугольниками.

Данное здесь определение эйлеровой характеристики нуждается в уточнении: следует еще указать, какие классы фигур мы рассматриваем, что понимается под клетками в каждом конкретном случае и, наконец, как определяется разбиение фигуры на клетки, т. е. как различные клетки «примыкают» друг к другу. Этим вопросам посвящен почти весь § 2.

Итак, рассмотрим некоторые классы фигур, для которых можно определить эйлерову характеристику.

Пусть $A_1 \ldots, A_n$ — различные точки на плоскости. *Незамкнутая ломаная линия* с вершинами в этих точках определяется как объединение прямолинейных отрезков $A_1A_2$, $A_2A_3$, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$, называемых ее *ребрами*. Если $n \geqslant 3$ и если первая и последняя вершины совпадают (т. е. $A_1=A_n$), а все остальные вершины различны, то ломаная называется *замкнутой*. Два ребра ломаной, имеющие общую вершину, считаются *смежными*. Ломаная (замкнутая или нет) называется *простой*, если никакие два ее ребра, не являющиеся смежными,

не имеют общих точек. Простую замкнутую ломаную назовем *контуром*.

Ясно, что эйлерова характеристика $\chi(L)=\text{В}-\text{Р}$ равна 1 для незамкнутой ломаной $L$ и равно 0 для замкнутой. Легко также проверяется, что $\chi(L)$ не изменится, если вставить произвольное число $m$ новых вершин внутрь какого-нибудь ребра, разбивая его тем самым на новые ребра в числе $m+1$, или, наоборот,

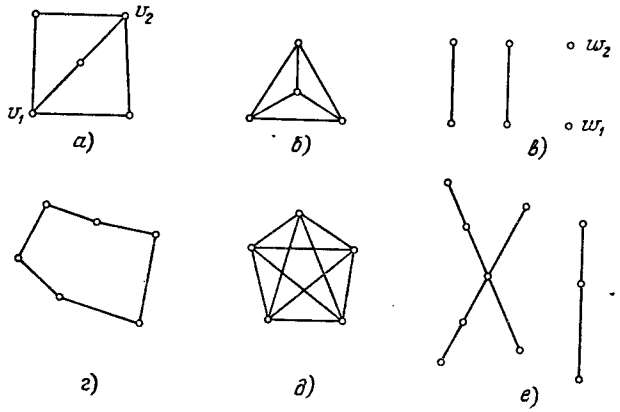



Рис. 4.

если заменить одним ребром несколько последовательных ребер, лежащих на одной прямой.

*Графом* называется фигура $G$, состоящая из конечного числа *вершин* (расположенных на плоскости или в пространстве) и прямолинейных отрезков, соединяющих некоторые пары вершин. Эти отрезки называются *ребрами* графа. Ясно, что, в частности, всякая ломаная является графом. Эйлерова характеристика графа есть разность В—Р; она инвариантна в том же смысле, что и у ломаной. Может случиться, что граф $G$ совсем не имеет ребер, а состоит только из $n$ вершин; в этом случае $\chi(G)=n$. Примеры графов показаны на рис. 4; при этом их вершины изображены маленькими светлыми кружками. Из рисунка видно, что некоторые ребра могут иметь «лишние» точки пересечения, которые не являются вершинами. Читатель проверит, что эйлеровы характеристики графов *а*), *б*), *в*), *г*), *д*), *е*) на этом рисунке равны соответственно —1, —2, 4, 0, —5, 2.

*Степенью* вершины графа называется число ребер, соединяющих ее с другими вершинами. На рис. 4, например, у графа *а*) вершины $v_1$ и $v_2$ имеют грань 3; степени остальных его вершин равны 2. Граф *в*) имеет две вершины степени 0 (а именно, $w_1$ и $w_2$) и четыре вершины степени 1. Степень каждой вершины графа *б*) равна 3, а графа *д*) равна 4. Вершины степени 0 называются еще *изолированными*.

Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить незамкнутой ломаной, состоящей из ребер графа.

Говорят, что граф *вкладывается в плоскость*, если его можно начертить на плоскости так, чтобы ребра пересекались только в вершинах. Таков, например, граф *а*), изображенный на рис. 5 (так называемый *полный* граф с четырьмя вершинами), ибо его можно «перечертить» так, чтобы лишние пересечения ребер исчезли (рис. 5, *б*). Правда, при этом перечерчивании нам пришлось заменить одно ребро графа двумя ребрами и ввести новую вершину. Обычно считается, что при этом граф «не изменился», во всяком случае, его эйлерова характеристика сохранила свое значение. Обратите еще внимание на то, что на рис. 4, *б*) изображен «тот же самый» граф, что и на рис. 5, *а*) и притом без лишних пересечений ребер и без введения новых вершин. Вообще, все графы рис. 4, кроме *д*), вкладываются в плоскость. С другой стороны, граф *д*) (называемый *полным* графом с пятью вершинами) в плоскость не вкладывается, даже если вводить новые вершины (см. задачу 13).

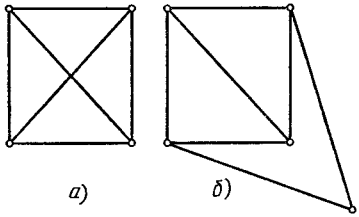



Рис. 5.

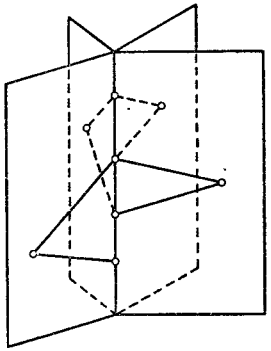


Рис. 6.

Интересно отметить, что каждый граф можно расположить в пространстве без лишних пересечений ребер.

Докажем это. Пусть граф $G$ имеет В вершин и Р ребер. Возьмем в пространстве «книжку с Р листами» (рис. 6, где Р=4), на ее «корешке» отметим В точек (вершин графа). Каждому из Р ребер графа поставим в соответствие свой лист книжки и на нем нарисуем это ребро в виде ломаной, состоящей из двух отрезков. Ясно, что лишние пересечения ребер отсутствуют; правда, нам пришлось заменить каждое ребро двумя новыми ребрами и одной новой вершиной. Заметим без доказательства, что каждый граф можно расположить в пространстве без введения новых вершин и без изломов ребер.

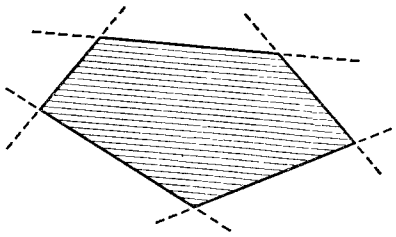


Рис. 7.

Переходим к следующему классу фигур — плоским многоугольникам, причем рассмотрим сначала простейшие из них — выпуклые.

Каждая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. При этом предполагается, что сама прямая содержится в каждой из них. Другими словами, мы предполагаем, что обе полуплоскости являются замкнутыми. *Выпуклым многоугольником* называется пересечение конечного числа полуплоскостей при условии, что оно, во-первых, *ограничено*, т. е. содержится в круге конечного радиуса, во-вторых, *двумерно*, т. е. содержит круг с радиусом, отличным от нуля (рис. 7). Последнее требование равносильно тому, что выпуклый многоугольник не лежит ни в одной прямой.

Определим теперь общий (не обязательно выпуклый) многоугольник.

*Многоугольником* называется плоская фигура $M$, состоящая из объединения конечного числа выпуклых многоугольников так, что выполнены следующие два условия:

1) любые два выпуклые многоугольника либо совсем не имеют общих точек, либо имеют только общую вершину, либо имеют общую сторону;

2) фигура $M$ *связна*, т. е. любые две ее точки можно соединить простой незамкнутой ломаной, целиком лежащей в $M$.

Последнее условие означает, что многоугольник не распадается на отдельные куски, не связанные между собой.

Из этого определения ясно, что следует понимать под разбиением многоугольника $M$ на клетки. Именно,

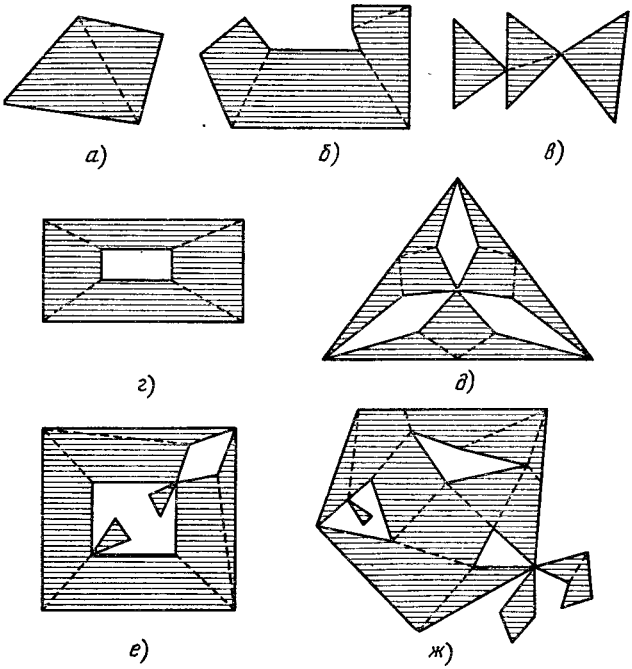



Рис. 8.

*гранями разбиения* будем называть те выпуклые многоугольники, из которых составлен многоугольник $M$, *ребрами разбиения* — стороны этих выпуклых многоугольников, а *вершинами разбиения* — их вершины. Рис. 8 дает примеры многоугольников и их разбиений. Ясно, что каждый многоугольник допускает разные представления в виде объединения выпуклых и поэтому имеет различные разбиения.

Теперь получает точный смысл понятие эйлеровой характеристики многоугольника. В следующем параграфе будет доказано, что она не зависит от выбора способа разбиения.

Среди точек многоугольника естественно различать внутренние точки и граничные. Точка многоугольника называется *внутренней*, если можно указать круг некоторого (хотя бы и очень малого) радиуса с центром в этой точке, целиком лежащий в многоугольнике. Точка многоугольника называется *граничной*, если круг любого радиуса с центром в этой точке содержит как точки самого многоугольника, так и точки его

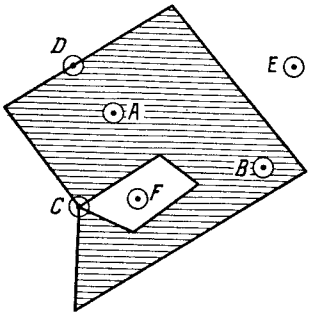



Рис. 9.

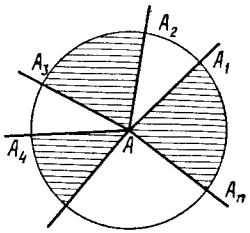



Рис. 10.

*дополнения* относительно плоскости (т. е. точки плоскости, не принадлежащие многоугольнику). На рис. 9 точки $A$ и $B$ являются внутренними точками многоугольника, $C$ и $D$ — граничными, $E$ и $F$ — точками дополнения. Множество всех граничных точек многоугольника называется его *границей*.

Докажем, что *граница многоугольника $M$ есть объединение конечного числа контуров*. Эта граница является графом $G$. Покажем сначала, что каждая вершина этого графа имеет четную степень. Действительно, пусть $A$ — вершина графа $G$. Проведем окружность с центром в точке $A$ столь малого радиуса, чтобы она пересекала только те ребра графа, которые выходят из $A$. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — последовательные точки пересечения окружности с этими ребрами (рис. 10). Будем двигаться по окружности от точки $A_1$ к точке $A_2$, затем к $A_3$ и т. д. Выходя из точки $A_1$, мы тем самым выходим из многоугольника $M$ в его дополнение, при переходе через точку $A_2$, наоборот, входим в многоугольник. Так как, проходя через последнюю точку $A_n$, мы опять входим в $M$, а входы и выходы чередуются, то число $n$ должно быть четным.

Теперь будем двигаться по ребрам графа, начиная движение с какой-нибудь вершины и не проходя ни одно ребро дважды. Поскольку все вершины имеют четные степени, то, входя в любую вершину, мы всегда имеем возможность из нее выйти. С другой стороны, так как число ребер и вершин графа $G$ конечно, то мы должны попасть в такую вершину, где уже были раньше. Так получается контур. Выбросим полученный контур из графа $G$. Новый граф опять будет иметь только четные степени вершин. Поэтому, повторяя несколько раз указанный обход, мы представим весь граф $G$, т. е. границу многоугольника $M$, в виде объединения конечного числа контуров, что и требовалось доказать.

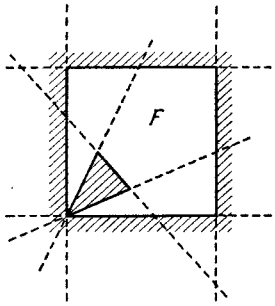


Рис. 11.

Многоугольник называется *простым*, если его граница состоит из одного контура. Таковы, например, все выпуклые многоугольники, а также многоугольник *б*) на рис. 8. Можно было бы доказать (мы не делаем этого), что дополнение простого многоугольника (относительно плоскости) связно. Этим свойством обладают не только простые многоугольники (см., например, рис. 8, *в*).

Если дополнение многоугольника несвязно, то оно состоит из нескольких связных кусков, называемых компонентами (рис. 8, *г*, *д*, *е*, *ж*). Одна компонента всегда является неограниченной; все остальные — ограничены. Эти последние компоненты мы будем называть *дырами*.

Докажем, что *каждая дыра $F$ вместе со своей границей является многоугольником*. Для этого достаточно проверить, что ее можно представить в виде объединения выпуклых многоугольников. Проведем прямые через все отрезки, входящие в границу дыры $F$ (рис. 11). Тогда получается некоторое разбиение всей плоскости. Все ограниченные грани этого разбиения — выпуклые многоугольники. Остается заметить, что все внутренние точки каждого из этих многоугольников лежат целиком либо в дыре $F$, либо в ее дополнении, и, следовательно, дыра $F$ (вместе с ее границей) равна объединению многоугольников первого из этих двух классов, что и требовалось доказать.

Дыра многоугольника называется *простой*, если ее граница является контуром. В следующих трех параграфах (§§ 3, 4 и 5) будут рассматриваться только простые многоугольники, а также такие, которые получаются из простых многоугольников «вырезанием» конечного числа простых дыр. Этим исключаются из рассмотрения, в частности, многоугольники *в*), *е*), *ж*) на рис. 8.

Сделаем замечание, относящееся к разбиению многоугольника $M$ на клетки. Иногда бывает удобнее считать гранями разбиения *открытые* выпуклые многоугольники, из которых составлен многоугольник $M$ (т. е. без их границ), а ребрами разбиения — *открытые* стороны этих выпуклых многоугольников (без их концов). При такой точке зрения различные клетки разбиения не имеют общих точек. Мы будем использовать разбиение в этом смысле только один раз — в § 7 (с. 47).

**Задача**

**9.** Пусть задано произвольное разбиение плоскости конечным числом прямых. Пусть $M$ есть объединение всех его ограниченных граней. Докажите, что фигура $M$ связна и поэтому является многоугольником. Докажите, что многоугольник $M$ либо простой, либо равен объединению двух простых многоугольников, имеющих единственную общую точку.

## § 3. ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Переходим к вычислению эйлеровой характеристики многоугольников, основанному на применении метода движущейся прямой. В связи с этим на протяжении всего § 3 будет предполагаться, что все вершины разбиения многоугольника расположены на разной высоте. Как и раньше, этого можно добиться, применяя лемму 1.

Рассмотрим сначала случай простого многоугольника. Введем следующую классификацию его вершин. Вершину $v$ назовем *выступающей вверх*, если внутренний угол многоугольника в этой вершине меньше $\pi$ (в дальнейшем все углы измеряются в радианной мере) и если обе смежные с ней вершины расположены ниже, чем $v$. Вершину $w$ назовем *входящей вниз*, если внутренний угол многоугольника в этой вершине больше $\pi$ и если

обе смежные с ней вершины расположены выше, чем $w$. Вершины этих двух классов будем называть *особыми*, а все остальные вершины многоугольника — *обыкновенными*. Причина выбора этих названий будет ясна из дальнейшего. На рис. 12 выступают вверх вершины $v_4$ и $v_9$,

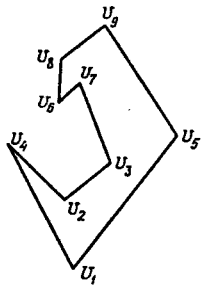



Рис. 12.

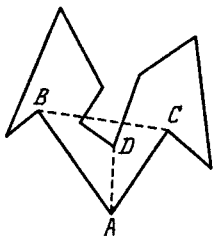



Рис. 13.

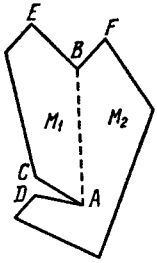



Рис. 14.

входит вниз вершина $v_2$; остальные шесть вершин обыкновенные. Пусть $\alpha$ обозначает число вершин, выступающих вверх, н $\beta$ — число вершин, входящих вниз.

Лемма 2. *Для каждого простого многоугольника, все вершины которого находятся на разной высоте, справедливо равенство*

$$\alpha - \beta = 1. \tag{3.1}$$

Доказательство. Применим индукцию по числу сторон многоугольника. Для треугольников равенство (3.1) очевидно, так как каждый треугольник имеет одну вершину, выступающую вверх*), и не имеет никаких других особых вершин. Заметим, что это верно также для всех выпуклых многоугольников. Докажем равенство (3.1) для простого многоугольника $M$, имеющего $n$ сторон, предполагая, что оно уже доказано для всех простых многоугольников с числом сторон, меньшим $n$. Предварительно заметим, что каждый простой многоугольник $M$ можно разбить диагональю, лежащей внутри $M$, на два простых многоугольника, каждый из которых имеет меньшее число сторон, чем $M$. Действительно, пусть $A$ — самая нижняя вершина многоугольника $M$, а $B$ и $C$ — смежные с ней вершины (рнс. 13). Соединим точки $B$ и $C$

*) Напомним, что все вершины на разной высоте.

диагональю. Если ни на отрезке $BC$, ни внутри треугольника $ABC$ нет других вершин многоугольника $M$, то диагональ $BC$ дает нужное разбиение. Если же такие вершины имеются, возьмем из них самую нижнюю; пусть это будет точка $D$. В этом случае нужное разбиение многоугольника $M$ дается его диагональю $AD$.

Возвратимся к доказательству равенства (3.1). Пусть диагональ $AB$ разбивает $M$ на два простых многоугольника $M_1$ и $M_2$ и является, следовательно, их общей стороной (рис. 14). Для упрощения доказательства предположим сначала, что отрезок $AB$ расположен вертикально, причем пусть $A$ обозначает его нижний конец, а $B$ — верхний; дальше будет указано, как нужно изменить доказательство, если это условие не выполнено. Пусть, кроме того, многоугольник $M_1$ примыкает к $AB$ слева, а многоугольник $M_2$ — справа.

Если точки $A$ и $B$ являются смежными вершинами каждого из многоугольников $M_1$ и $M_2$, то обозначим через $C$ вершину многоугольника $M_1$, которая является второй смежной с $A$, и через $E$ ту его вершину, которая является второй смежной с $B$. Аналогичный смысл имеют обозначения $D$ и $F$ для вершин многоугольника $M_2$ (рис. 14). Возможны, однако, «исключительные» случаи, когда точки $A$ и $B$ (или одна из них) не являются вершинами одного из многоугольников $M_1$ и $M_2$ (многоугольники 4) на рис. 15 и 5) на рис. 16). В этих случаях обозначения указаны на рисунках. Может еще случиться, что $C=E$ или $D=F$.

Сопоставим каждой вершине $v$ многоугольника $M$ число $f(v)$ по следующему правилу:

$$f(v)=\begin{cases} 1, \text{ если } v \text{ выступает вверх,} \\ -1, \text{ если } v \text{ входит вниз,} \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Это значит, что мы определяем функцию $f$ на вершинах многоугольника $M$. Например, на рис. 14 эта функция принимает значение 1 на вершинах $E$ и $F$, значение $-1$ на вершинах $A$ и $B$ и значение 0 на всех остальных вершинах. На вершинах многоугольников $M_1$ и $M_2$ определим функции $f_1$ и $f_2$ по такому точному правилу, как $f$ определена на вершинах $M$. Индексы 1 и 2 у $f_1$ и $f_2$ как раз и показывают, что эти функции соответствуют многоугольникам $M_1$ и $M_2$. В случае, когда, например,

точка $A$ не является вершиной многоугольника $M_1$, мы, тем не менее, полагаем по определению $f_1(A)=0$. Таким образом, функции $f_1$ и $f_2$ обязательно определены и в точках $A$ и $B$. Легко видеть, что если $v$ — вершина многоугольника $M_1$, отличная от точек $A$ и $B$, то $f_1(v)=f(v)$; аналогично, $f_2(v)=f(v)$ для всех вершин $v$ многоугольника $M_2$, отличных от $A$ и от $B$.

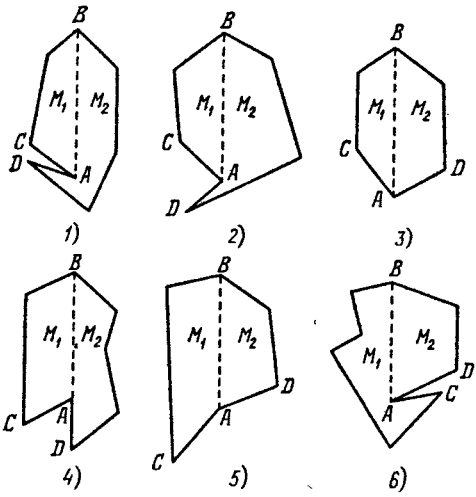



Рис. 15.

Равенство (3.1), которое нужно доказать, теперь можно переписать так:

$$\sum f(v)=1, \tag{3.2}$$

где суммирование распространяется на все вершины $v$ многоугольника $M$. Так как каждый из многоугольников $M_1$ и $M_2$ имеет число вершин, меньшее $n$, то по предположению индукции для первого из них выполняется равенство

$$\sum f_1(v)=1, \tag{3.3}$$

а для второго — равенство

$$\sum f_2(v)=1, \tag{3.4}$$

где суммы берутся по всем вершинам $M_1$ и $M_2$ соответст-

венно. Сложим почленно равенства (3.3) и (3.4) и добавим в обеих частях одинаковые слагаемые; в результате получаем

$$\sum f_1(v)-f_1(A)-f_1(B)+\sum f_2(v)-f_2(A)-f_2(B)+f(A+$$
$$+f(B)=2-f_1(A)-f_1(B)-f_2(A)-f_2(B)+f(A)+f(B) \quad (3.5)$$

Левая часть равенства (3.5) равна $\sum f(v$, т е сумме значений функции $f$ по всем вершинам многоугольника

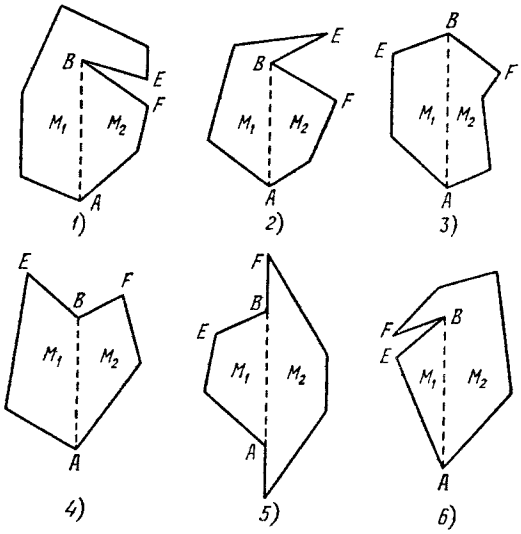



Рис. 16.

$M$. Поэтому для доказательства равенства (3.2) доста точно установить, что

$$f_1(A)+f_1(B)+f_2(A)+f_2(B)-f(A-f(B)=1 \quad (3.6)$$

Мы докажем, что

$$f_1(A)+f_2(A)-f(A)=0, \quad (3.7)$$
$$f_1(B)+f_2(B)-f(B)=1, \quad (3.8)$$

откуда сразу следует (3.6) и вместе с тем справедли вость леммы 2.

Пусть $\varphi_1$ обозначает величину угла $BAC$, $\varphi_2$ ве личину угла $BAD$ (рис. 14 или 15). Условимся от

считывать оба эти угла от отрезка $AB$ в положительном направлении, т. е. против движения часовой стрелки, тогда $\varphi_1 < \varphi_2$. Так как отрезок $AB$ (кроме его концов) лежит внутри многоугольника $M$, то значения 0 и $2\pi$ для углов $\varphi_1$ и $\varphi_2$ «запрещены». Далее, поскольку все вершины многоугольника лежат на разной высоте, то «запрещенными» для этих углов являются также значения $\pi/2$ и $3\pi/2$. Таким образом, для доказательства равенства (3.7) надо рассмотреть шесть случаев, представленных в таблице 1 и изображенных на рис. 15.

Рассмотрим внимательно первый из этих случаев, когда $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi/2$. При этом обе точки $C$ и $D$ лежат

Таблица 1

| Номер случая | Неравенства для углов | $f(A)$ | $f_1(A)$ | $f_2(A)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi/2$ | $-1$ | 0 | $-1$ |
| 2 | $0 < \varphi_1 < \pi/2 < \varphi_2 < 3\pi/2$ | 0 | 0 | 0 |
| 3 | $0 < \varphi_1 < \pi/2 < 3\pi/2 < \varphi_2 < 2\pi$ | 0 | 0 | 0 |
| 4 | $\pi/2 < \varphi_1 < \varphi_2 < 3\pi/2$ | 0 | 0 | 0 |
| 5 | $\pi/2 < \varphi_1 < 3\pi/2 < \varphi_2 < 2\pi$ | 0 | 0 | 0 |
| 6 | $3\pi/2 < \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$ | $-1$ | $-1$ | 0 |

выше точки $A$, и внутренний угол $CAD$ многоугольника $M$ больше чем $\pi$ (его величина равна $2\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)$). Поэтому вершина $A$ указанного многоугольника входит вниз и, следовательно, $f(A) = -1$. Аналогично, обе точки $B$ и $D$ лежат выше точки $A$, и внутренний угол $BAD$ многоугольника $M_2$ больше чем $\pi$ (его величина равна $2\pi - \varphi_1$). Поэтому вершина $A$ многоугольника $M_2$ входит вниз, и, следовательно, $f_2(A) = -1$. С другой стороны, обе вершины $B$ и $C$ многоугольника $M_1$ лежат выше, чем его вершина $A$, и, кроме того, его внутренний угол $BAC$ меньше чем $\pi$ (его величина равна $\varphi_1$). Поэтому вершина $A$ — обыкновенная для $M_1$ и, значит, $f_1(A) = 0$. Следовательно, равенство (3.7) в этом первом случае удовлетворяется.

Значения функций $f(A)$, $f_1(A)$ и $f_2(A)$ в остальных пяти случаях приведены в таблице 1. Из нее видно, что равенство (3.7) выполняется всегда.

Пусть $\psi_1$ обозначает величину угла $ABF$, $\psi_2$ — величину угла $ABE$ (рис. 14 или 16). Эти углы с вершиной в точке $B$ отсчитываются от отрезка $BA$ в положительном направлении. Поэтому $\psi_1 < \psi_2$. Как и раньше, значения 0, $\pi/2$, $3\pi/2$ и $2\pi$ для этих углов запрещены.

Следовательно, для доказательства равенства (3.8) надо рассмотреть шесть случаев, изображенных на рис. 16. Неравенства, связывающие углы $\psi_1$ и $\psi_2$ в каждом из этих случаев, а также значения функций $f$, $f_1$, $f_2$ в точке $B$ выписаны в таблице 2. Из таблицы видно, что равенство (3.8) всегда справедливо.

Итак, лемма 2 доказана в случае вертикального расположения отрезка $AB$. Пусть теперь этот отрезок образует с вертикальной прямой угол $\omega$, $0 \leqslant \omega < \frac{\pi}{2}$. В этом случае каждому из углов $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\psi_1$ и $\psi_2$ «запрещено»

Таблица 2

| Номер случая | Неравенства для углов | $f(B)$ | $f_1(B)$ | $f_2(B)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $0<\psi_1<\psi_2<\pi/2$ | 0 | 0 | 1 |
| 2 | $0<\psi_1<\pi/2<\psi_2<3\pi/2$ | 0 | 0 | 1 |
| 3 | $0<\psi_1<\pi/2<3\pi/2<\psi_2<2\pi$ | 1 | 1 | 1 |
| 4 | $\pi/2<\psi_1<\psi_2<3\pi/2$ | $-1$ | 0 | 0 |
| 5 | $\pi/2<\psi_1<3\pi/2<\psi_2<2\pi$ | 0 | 1 | 0 |
| 6 | $3\pi/2<\psi_1<\psi_2<2\pi$ | 0 | 1 | 0 |

принимать значения 0, $2\pi$, $\frac{\pi}{2}+\omega$, $\frac{3\pi}{2}+\omega$. В остальном доказательство не меняется.

Теорема 1. *Эйлерова характеристика простого многоугольника равна* 1.

Доказательство. Простой многоугольник считается заданным с некоторым разбиением. Расположим его так, чтобы все вершины разбиения находились на разной высоте. Впрочем, для справедливости теоремы это предположение несущественно. Занумеруем вершины разбиения $v_1, \ldots, v_B$ в порядке возрастания их высоты, т. е. так, чтобы вершина $v_1$ была самой нижней, вершина $v_2$ лежала выше, чем $v_1$, и т. д. Отсюда следует, что если ребро разбиения соединяет вершины $v_i$ и $v_j$, то одна из этих вершин является верхним концом ребра, а другая — нижним. Аналогично, каждая грань разбиения имеет единственную самую нижнюю вершину. Пусть $P_i$ ($i=1, \ldots, B$) обозначает число ребер, для которых точка $v_i$ служит нижним концом, и $\Gamma_i$ — число граней, для которых $v_i$ служит самой нижней вершиной. Из сказанного ясно, что общее число ребер разбиения равно

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_B, \qquad (3.9)$$

а общее число граней равно

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_B. \qquad (3.10)$$

Найдем для каждой вершины $v_i$ соотношение между числами $P_i$ и $\Gamma_i$. Пусть $M_i$ — многоугольник, образованный всеми теми гранями (и ребрами), которые имеют точку

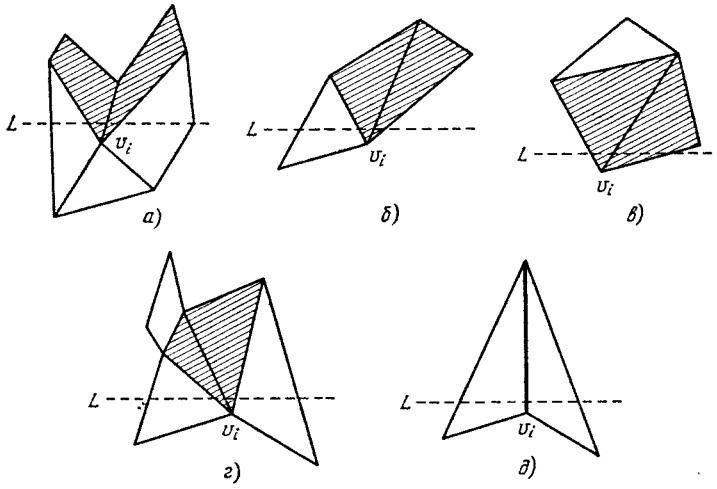



Рис. 17.

$v_i$ самой нижней вершиной (рис. 17 и 18, где многоугольники $M_i$ заштрихованы). Многоугольник $M_i$ может «вырождаться», т. е. содержать не только грани и их стороны, но и такие ребра, которые не входят в границу какой-либо грани (на рис. 17 и 18 такие ребра изображены жирными отрезками). Рассмотрим три случая.

1. Точка $v_i$ является обыкновенной вершиной многоугольника $M$ или его внутренней точкой (для простоты скажем тогда, что $v_i$ — обыкновенная вершина разбиения). Так как каждая грань выпукла, то в этом случае горизонтальная прямая $L$, проходящая чуть выше вершины $v_i$ («движущаяся» прямая), пересекает многоугольник $M_i$ по одному отрезку (рис. 17). Поэтому

$$P_i - \Gamma_i = 1. \qquad (3.11)$$

2. Вершина $v_i$ многоугольника $M$ выступает вверх (рис. 18, *а*). В этом случае, очевидно,

$$P_i = \Gamma_i = 0. \tag{3.12}$$

3. Вершина $v_i$ многоугольника $M$ входит вниз (рис. 18, *б*, *в*). В этом случае прямая $L$ пересекает многоугольник $M_i$ по двум отдельным отрезкам (которые могут вырождаться в точки). Поэтому

$$P_i - \Gamma_i = 2. \tag{3.13}$$

Именно равенства (3.11) — (3.13) дают повод различать обыкновенные и особые вершины разбиения.

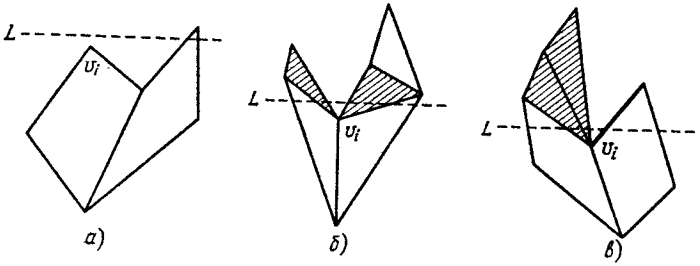



Рис. 18.

Для нахождения эйлеровой характеристики знакопеременную сумму В—Р+Г расписываем по вершинам, используя равенства (3.9) и (3.10):

$$\chi(M) = В - Р + Г =$$

$$= (1 - P_1 + \Gamma_1) + (1 - P_2 + \Gamma_2) + \ \ldots \ + (1 - P_в + \Gamma_в).$$

Ввиду равенств (3.11) — (3.13) выражение $1 - P_i + \Gamma_i$ равно 0 для каждой обыкновенной вершины, равно 1 для каждой вершины, выступающей вверх, и равно —1 для каждой вершины, входящей вниз. Поэтому $\chi(M) = \alpha - \beta$, или, согласно лемме 2, $\chi(M) = 1$. Теорема 1 доказана.

Следствие. *Эйлерова характеристика простого открытого многоугольника (т. е. такого, из которого выброшены его граничные вершины и ребра) равна* 1.

Доказательство следствия получается из теоремы 1 и из того факта, что эйлерова характеристика границы простого многоугольника равна нулю.

Теорема 2. *Эйлерова характеристика многоугольника $M$, имеющего $n$ дыр, равна* $1-n$.

Ниже будет дано доказательство частного случая этой теоремы. Общий случай будет доказан в § 12. Предварительно введем определения и докажем лемму.

Пусть $M$ — снова простой многоугольник. Назовем его вершину $v$ *выступающей вниз*, если внутренний угол многоугольника в этой вершине меньше $\pi$, и если обе смежные с ней вершины расположены выше, чем $v$. На рис. 12 такими являются вершины $v_1$ и $v_6$. Вершину $w$ назовем *входящей вверх*, если внутренний угол многоугольника в этой вершине больше $\pi$ и если обе смежные с ней вершины расположены ниже ее. На рис. 12 такой является вершина $v_7$. Обозначим через $\gamma$ число вершин простого многоугольника, выступающих вниз, и через $\delta$ — число его вершин, входящих вверх.

Лемма 3. *Для каждого простого многоугольника, все вершины которого находятся на разной высоте, справедливо равенство*

$$\gamma-\delta=1. \tag{3.14}$$

Доказательство. Равенство (3.14) можно было бы доказать почти так же, как и равенство (3.1) *), но гораздо проще вывести (3.14) из (3.1), что мы и сделаем. Пусть точка движется по контуру многоугольника в каком-нибудь определенном направлении, начиная движение в самой нижней вершине $v$. Пусть она обойдет один раз весь контур и вернется в вершину $v$. При этом точка будет несколько раз подниматься и опускаться. Ясно, что число участков подъема равно числу участков спуска. С другой стороны, каждый подъем начинается в вершине, выступающей или входящей вниз, а каждый спуск — в вершине, выступающей или входящей вверх. Поэтому число участков подъема равно $\gamma+\beta$, а число участков спуска равно $\delta+\alpha$. Значит, $\gamma+\beta=\delta+\alpha$, что вместе с (3.1) дает (3.14). Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 2. Мы будем предполагать, что граница каждой дыры не имеет общих точек ни с внешним контуром многоугольника $M$,

*) Можно заметить, что если поменять «верх» и «низ», то все выступающие вверх вершины станут выступающими вниз и т. д. Тем самым доказательство равенства (3.14) получается сразу же из леммы 2.

ни с границами других дыр. Как и в доказательстве теоремы 1, занумеруем все вершины разбиения в порядке возрастания их высоты и распишем выражение для эйлеровой характеристики $\chi(M)=\text{В}-\text{Р}+\Gamma$ по вершинам:

$$\text{В}-\text{Р}+\Gamma=(1-\text{Р}_1+\Gamma_1)+\ \ldots\ +(1-\text{Р}_\text{в}+\Gamma_\text{в}). \quad (3.15)$$

Как и раньше, легко проверяются два факта: во-первых, если вершина разбиения $v_i$ является внутренней точкой многоугольника $M$, то соответствующее ей слагаемое $1-\text{Р}_i+\Gamma_i=0$; во-первых, сумма всех слагаемых правой части равенства (3.15), соответствующих тем вершинам разбиения, которые лежат на внешнем контуре многоугольника $M$, равна 1.

Рассмотрим теперь какую-нибудь дыру $C$ и все вершины разбиения, лежащие на ее границе. Как было сказано, дыра $C$ вместе с ее границей является простым многоугольником. Пусть точка $v_i$, рассматриваемая в качестве вершины многоугольника $C$, выступает вниз. Тогда, будучи вершиной многоугольника $M$, эта точка *входит* вниз. Поэтому, как мы видели в доказательстве теоремы 1, $1-\text{Р}_i+\Gamma_i=-1$. Если вершина $v_i$ многоугольника $C$ входит вверх, то, как вершина многоугольника $M$, она *выступает* вверх, и поэтому $1-\text{Р}_i+\Gamma_i=1$. Для всех остальных вершин многоугольника $C$ имеем $1-\text{Р}_i+\Gamma_i=0$. Значит, сумма всех слагаемых правой части равенства (3.15), соответствующих дыре $C$, равна $\delta-\gamma$, и по лемме 3 $\delta-\gamma=-1$. Повторяя это рассуждение для каждой дыры отдельно, получаем равенство $\chi(M)=1-n$. Итак, мы доказали частный случай теоремы 2.

Пусть фигура $A$ является объединением конечного числа многоугольников, не имеющих попарно общих точек. Эти многоугольники называются *компонентами* фигуры $A$; обозначим их число через $c(A)$. Далее, пусть $c^*(A)$ обозначает число *компонент дополнения фигуры $A$ до плоскости*. Одна из этих компонент неограничена; остальные являются дырами, относящимися к тому или другому многоугольнику. Из теоремы 2 сразу получается такое

Следствие. *Эйлерова характеристика фигуры $A$ равна*

$$\chi(A)=c(A)-c^*(A)+1. \quad (3.16)$$

### Задача

**10.** Докажите, что при любом разбиении многоугольника, имеющего $n$ дыр, сумма $В+Р+Г+n$ нечетна.

## § 4. ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА И СУММА ВНЕШНИХ УГЛОВ МНОГОУГОЛЬНИКА

В этом параграфе будет показано, что эйлерова характеристика многоугольника очень просто выражается через сумму его внешних углов. Тем самым будет дано, в частности, другое доказательство теоремы 1.

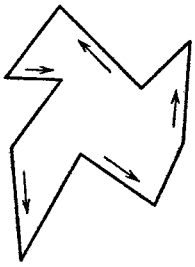


Рис. 19.

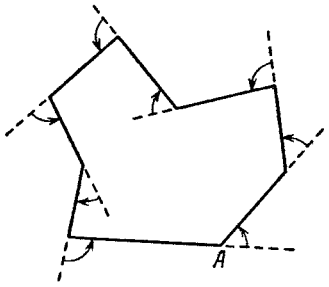



Рис. 20.

Как и раньше, начнем со случая простых многоугольников.

Пусть $M$ — простой многоугольник. *Ориентировать* его — значит указать, какое из двух возможных направлений обхода его контура считается положительным. Обычно это такое направление обхода, при котором внутренние точки многоугольника остаются слева (рис. 19). Тогда противоположное ему направление будет отрицательным. Можно еще сказать, что обход контура в положительном направлении есть движение по этому контуру против часовой стрелки. Это связано с отмеченным выше соглашением о положительном направлении отсчета углов.

Пусть $M$ — простой ориентированный многоугольник, и пусть мы движемся по его контуру в положительном направлении. *Внешним углом* многоугольника в его вершине $A$ называется угол между продолжением (в положительном направлении) той его стороны, которая при этом кончается в точке $A$, и той стороной много-

угольника, которая начинается в этой точке (рис. 20). Внешний угол естественно считать мерой поворота контура в точке $A$ при его обходе в положительном направлении. Если, например, внутренний угол в вершине $A$ близок к $\pi$, то внешний угол близок к 0, и контур поворачивается мало. Вообще, как легко проверить, между внутренним углом $\varphi$ многоугольника в его вершине $A$ и внешним углом $\psi$ в этой же вершине имеется соотношение

$$\varphi+\psi=\pi \tag{4.1}$$

(с учетом знака угла $\psi$). Заметим, что внутренние углы многоугольника всегда считаются положительными. Из формулы (4.1) следует, в частности, что внешний угол многоугольника положителен тогда и только тогда, когда соответствующий ему внутренний угол меньше $\pi$.

Лемма 4. *Пусть $M$ — простой многоугольник, имеющий $n$ сторон. Тогда сумма $\Phi$ всех его внутренних углов равна $(n-2)\pi$, а сумма $\Psi$ всех его внешних углов равна $2\pi$ независимо от числа сторон.*

Читатель, конечно, знаком с частным случаем этой леммы, относящимся к выпуклым многоугольникам.

Докажем первое утверждение леммы индукцией по числу сторон многоугольника. Для треугольников оно известно. Допуская его верным для всех многоугольников с числом сторон, меньшим $n$, докажем его для многоугольника с $n$ сторонами. Проведем в многоугольнике $M$ диагональ, делящую его на два простых многоугольника $M_1$ и $M_2$ (см. доказательство леммы 2). Пусть $\Phi_1$ и $n_1$ обозначают сумму внутренних углов и число сторон многоугольника $M_1$, $\Phi_2$ и $n_2$ — те же величины для многоугольника $M_2$. По предположению индукции имеем $\Phi_1=(n_1-2)\pi$, $\Phi_2=(n_2-2)\pi$. Кроме того, очевидно, $\Phi=\Phi_1+\Phi_2$ и $n_1+n_2=n+2$. Поэтому

$$\Phi=(n_1-2)\pi+(n_2-2)\pi=(n_1+n_2-4)\pi=(n-2)\pi,$$

и первое утверждение леммы доказано.

Пусть $\varphi_i$ — внутренний угол многоугольника и $\psi_i$ — соответствующий ему внешний угол, $i=1, \ldots, n$, тогда $\varphi_i+\psi_i=\pi$. Поэтому

$$\Psi=\sum_{i=1}^{n}\psi_i=\sum_{i=1}^{n}(\pi-\varphi_i)=n\pi-\sum_{i=1}^{n}\varphi_i=n\pi-n\pi+2\pi=2\pi.$$

Лемма 4 доказана.

Докажем теперь *формулу*

$$\Psi = 2\pi(\mathrm{B} - \mathrm{P} + \Gamma), \tag{4.2}$$

*связывающую сумму внешних углов простого многоугольника с его эйлеровой характеристикой.* При этом используются обозначения леммы 4.

Доказательство. Пусть $M$ — простой многоугольник, разбитый на грани, $\alpha$ — любой внутренний угол произвольной грани, $\sum\alpha$ — сумма всех таких углов. Тогда $\sum\alpha = \sum_1\alpha + \sum_2\alpha$, где $\sum_1$ обозначает сумму всех тех углов $\alpha$, вершины которых лежат на границе многоугольника $M$, и $\sum_2$ — сумму остальных углов, т. е. таких, вершины которых лежат внутри $M$.

Пусть $\mathrm{B}_1$ — число вершин разбиения, лежащих на границе $M$, и $\mathrm{B}_2$ — число внутренних вершин разбиения. Тогда $\mathrm{B} = \mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2$. Сумма всех углов $\alpha$ вокруг каждой внутренней вершины равна $2\pi$, поэтому $\sum_2 = 2\mathrm{B}_2\pi$. Отсюда, учитывая равенство (4.1), получаем следующее выражение для суммы внешних углов многоугольника $M$:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{\mathrm{B}_1} \psi_i = \sum_{i=1}^{\mathrm{B}_1} (\pi - \varphi_i) = \mathrm{B}_1\pi - \sum_{i=1}^{\mathrm{B}_1} \varphi_i =$$

$$= \mathrm{B}_1\pi - \sum_1\alpha = \mathrm{B}_1\pi - \sum\alpha + \sum_2\alpha = (\mathrm{B}_1 + 2\mathrm{B}_2)\pi - \sum\alpha. \tag{4.3}$$

Пусть $m$ — число сторон (или углов) той грани, у которой это число наибольшее. По лемме 4

$$\sum\alpha = [\Gamma_3 + 2\Gamma_4 + \ \ldots\ + (m-2)\Gamma_m]\,\pi, \tag{4.4}$$

где $\Gamma_3$ — число треугольных, $\Gamma_4$ — число четырехугольных, ..., $\Gamma_m$ — число $m$-угольных граней. Из (4.3) и (4.4) следует

$$\Psi = [\mathrm{B}_1 + 2\mathrm{B}_2 - \Gamma_3 - 2\Gamma_4 - \ \ldots\ - (m-2)\Gamma_m]\,\pi. \tag{4.5}$$

Пусть $\mathrm{P}_1$ — число ребер разбиения, лежащих на границе многоугольника $M$, и $\mathrm{P}_2$ — число внутренних ребер, тогда $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2$. Так как каждое внутреннее ребро относится к двум граням, а каждое граничное ребро — к одной, то, суммируя ребра по всем граням, получаем

$$3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + \ \ldots\ + m\Gamma_m = \mathrm{P}_1 + 2\mathrm{P}_2. \tag{4.6}$$

Из очевидного равенства

$$\Gamma = \Gamma_3 + \Gamma_4 + \ \ldots\ + \Gamma_m$$

следует

$$\Gamma_3+2\Gamma_4+\ \ldots\ +(m-2)\,\Gamma_m=$$

$$=(3\Gamma_3+4\Gamma_4+\ \ldots\ +m\Gamma_m)-2(\Gamma_3+\Gamma_4+\ \ldots\ +\Gamma_m)=$$

$$=(3\Gamma_3+4\Gamma_4+\ \ldots\ +m\Gamma_m)-2\Gamma. \qquad (4.7)$$

Из равенств (4.5), (4.7), (4.6), $B_1=P_1$ и $P=P_1+P_2$ получаем

$$\Psi=[B_1+2B_2-P_1-2P_2+2\Gamma+B_1-P_1]\,\pi,$$

или

$$\Psi=2\pi\,(B-P+\Gamma), \qquad (4.2)$$

что и требовалось доказать.

Ясно, что из формулы (4.2) и леммы 4 снова следует утверждение теоремы 1.

Пусть теперь $M$ — многоугольник с дырами. Для простоты будем считать, что граница каждой дыры, представляющая собой контур, не имеет общих точек ни с границами других дыр, ни с внешним контуром многоугольника $M$. Ориентация многоугольника задается, как и раньше, а именно, положительным считается такое направление обхода его границы, при котором внутренние точки $M$ остаются слева. Это значит, что внешний контур обходится против часовой стрелки, а граница каждой дыры — по часовой стрелке (рис. 21).

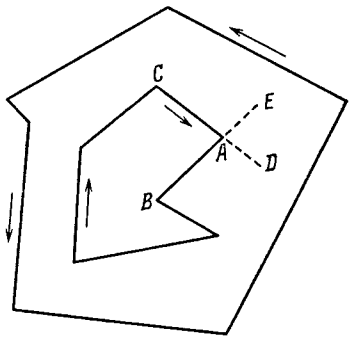



Рис. 21

Сохраняется также и определение внешнего угла. Легко проверяется следующий факт. Если $A$ — вершина многоугольника $M$, лежащая на границе дыры $F$, $\psi$ — внешний угол $M$ в точке $A$, $\omega$ — внешний угол простого многоугольника $F$ в этой же точке, то $\psi=-\omega$. Например, на рис. 21 внешним углом многоугольника $M$ в точке $A$ является угол $DAB$, а многоугольника $F$ — угол $EAC$. Эти углы равны по абсолютной величине как верти-

кальные. Ясно также, что они имеют противоположные знаки. Таким образом, сумма внешних углов многоугольника, взятая по всем вершинам какой-либо одной его дыры, равна $-2\pi$. Значит, для многоугольника $M$ с $n$ дырами выполняется равенство $\Psi = 2\pi(1-n)$ и ввиду теоремы $2\,\Psi = 2\pi\chi(M)$. Последнее равенство можно было бы доказать независимо от теоремы 2.

### Задачи

**11.** Пусть простой пятиугольник разбит на выпуклые многоугольные грани так, что каждая сторона пятиугольника является стороной какой-то грани. Докажите, что если число граней не меньше 5, то хотя бы в одной из них имеется угол $\geqslant 2\pi/5$.

**12.** Пусть простой многоугольник $M$ разбит на простые многоугольники $M_1, \ldots, M_n$ так, что каждые два многоугольника $M_i$ и $M_j$ либо совсем не имеют общих точек, либо их пересечение состоит из простой незамкнутой ломаной, лежащей на границе каждого из них. Эти ломаные могут вырождаться, т. е. быть точками. Назовем многоугольники $M_1, \ldots, M_n$ *гранями разбиения* $M$. *Внутренней вершиной разбиения* назовем такую внутреннюю точку многоугольника $M$, которая принадлежит трем граням (или большему их числу). *Граничной вершиной разбиения* назовем точку границы $M$, принадлежащую двум граням (или большему их числу) *Ребрами разбиения* будем называть простые незамкнутые ломаные, которые лежат на границах граней и соединяют вершины разбиения. Используя соображения, примененные в доказательстве формулы (4.2), докажите, что при таком понимании разбиения справедливо равенство $\chi(M) = \mathrm{B} - \mathrm{P} + \Gamma = 1$.

**13.** Используя результат задачи 12, докажите, что полный граф с пятью вершинами не вкладывается в плоскость.

## § 5. ПРИМЕНЕНИЕ ЭЙЛЕРОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ПЛОЩАДЕЙ

Пусть на плоскости проведены горизонтальные прямые так, что расстояние между каждой парой соседних прямых равно 1, и вертикальные прямые с этим же условием (рис. 22). Такие прямые разбивают плоскость на квадраты со стороной, равной 1, и, следовательно, имеющие единичную площадь.

Множество вершин всех квадратов называется *точечной решеткой*, а сами вершины квадратов — *узлами* этой *решетки*.

Мы применим эйлерову характеристику к вычислению площадей многоугольников, все вершины которых находятся в узлах решетки. Такие многоугольники условимся называть *решеточными*. В этом параграфе рассматриваются только решеточные многоугольники.

*Если $M$ — простой решеточный многоугольник, то для его площади $S(M)$ оказывается справедливой формула*

$$S(M)=i+\frac{b}{2}-1, \tag{5.1}$$

*где $i$ — число узлов, попавших внутрь многоугольника $M$, $b$ — число узлов, лежащих на его границе.* Например, для многоугольника $M$ (рис. 23) имеем $i=13$, $b=16$, и поэтому $S(M)=13+\frac{16}{2}-1=20$. Таким образом, вычисление площади здесь сводится к задаче подсчета

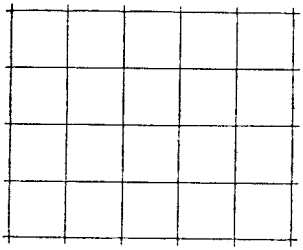


Рис. 22.

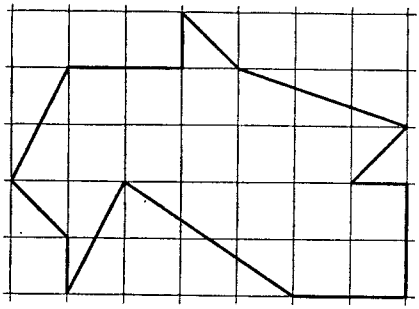


Рис. 23.

узлов решетки двух разных типов. Формула (5.1) получена в 1899 г. австрийским математиком Г. Пиком (1859—1943 [?]).

Доказательство формулы Пика будет проведено в три этапа.

1. Решеточный треугольник назовем *примитивным*, если внутри него и на его сторонах нет узлов решетки; примеры таких треугольников показаны на рис. 24. Первый этап доказательства состоит в проверке того, что площадь любого примитивного треугольника $\triangle$ равна $1/2$:

$$S(\triangle)=1/2. \tag{5.2}$$

Пусть $ABC$ — примитивный треугольник (рис. 25), $S(ABC)$ — его площадь, $AGCE$ — наименьший прямоугольник с вершинами в узлах решетки, содержащей треугольник $ABC$. Пусть $D$ и $F$ — основания перпендикуляров, опущенных из точки $B$ на прямые $AE$ и $CE$ соответственно. Введем следующие обозначения для длин отрезков:

$$|AD|=p,\ |AE|=q,\ |EF|=r,\ |EC|=s.$$

Числа $p$, $q$, $r$ и $s$, очевидно, целые. Найдем площади треугольников $ACE$, $ABD$, $BCF$ и прямоугольника $BDEF$. Имеем

$$S(ACE)=\frac{qs}{2}, \qquad S(ABD)=\frac{pr}{2},$$

$$S(BCF)=\frac{(q-p)(s-r)}{2}, \qquad S(BDEF)=(q-p)r.$$

Отсюда

$$S(ABC)=\frac{qs}{2}-\frac{pr}{2}-\frac{(q-p)(s-r)}{2}-(q-p)r,$$

или после упрощения

$$S(ABC)=\frac{1}{2}(ps-qr). \tag{5.3}$$

Мы не использовали пока условия, что треугольник $ABC$ примитивный. Покажем, что если это условие выполнено, то в формуле (5.3) будет $ps-qr=1$, и, следовательно, равенство (5.2) справедливо. Обозначим через

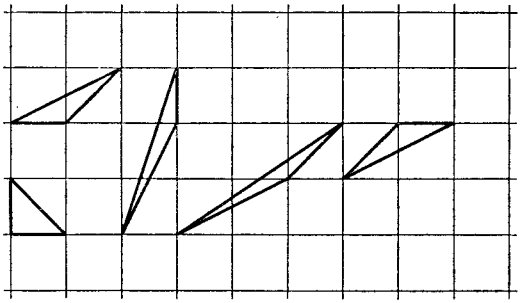


Рис. 24.

$N(M)$ число узлов решетки, лежащих *внутри* (но не на границе!) многоугольника $M$, и через $N(PQ)$ — число узлов, лежащих на отрезке $PQ$ и отличных от его концов. Таким образом, например, $N(ABC)=N(AB)=N(AC)=N(BC)=0$ (рис. 25).

Найдем сначала число $N(AGCE)$. Так как $|AE|=|GC|=q$, $|AG|=|CE|=s$, то прямоугольник $AGCE$ содержит всего $(q+1)(s+1)$ узлов. Из них $2(q+1)+2(s+1)-4$ узлов лежат на границе прямоугольника, остальные — внутри него. Таким образом, $N(AGCE)=(q+1)(s+1)-2(q+1)-2(s+1)+4=(q-1)(s-1)$. Далее, так как $AC$ — диагональ прямоугольника $AGCE$,

делящая его на два равных треугольника, и $N(AC)=0$, то

$$N(ACE)=\frac{1}{2}\,N(AGCE)=\frac{1}{2}\,(q-1)(s-1).$$

Аналогично,

$$N(ABD)=\frac{1}{2}\,(p-1)(r-1),\ N(BCF)=\frac{1}{2}\,(q-p-1)(s-r-1),$$
$$N(BDEF)=(q-p-1)(r-1),$$
$$N(BD)=r-1,\quad N(BF)=q-p-1.$$

Из рисунка 25 ясно, что

$$N(ACE)=N(ABC)+N(ABD)+N(BCF)+N(BDEF)+$$
$$+N(AB)+N(BC)+N(BD)+N(BF)+1,$$

где единица в правой части соответствует точке $B$. Подставляя в эту формулу найденные значения чисел $N(M)$ для разных многоугольников $M$, получаем

$$\frac{1}{2}\,(q-1)(s-1)=\frac{1}{2}\,(p-1)(r-1)+\frac{1}{2}\,(q-p-1)(s-r-1)+$$
$$+(q-p-1)(r-1)+(r-1)+(q-p-1)+1.$$

После упрощения это дает $ps-qr=1$, что и доказывает формулу (5.2).

2. Пусть $M$ — простой решеточный многоугольник. Покажем, что его можно разбить на примитивные треугольники. Так как многоугольник всегда предполагается заданным в виде разбиения на выпуклые многоугольники, а каждый выпуклый решеточный многоугольник разбивается на решеточные треугольники, то остается показать, что каждый решеточный треугольник можно разбить на примитивные. Пусть внутри $\triangle$ или на его границе имеются узлы решетки. Соединим какой-нибудь внутренний узел со всеми вершинами треугольника $\triangle$ или какой-нибудь узел, лежащий на стороне $\triangle$, с его противоположной вершиной. Тогда получается разбиение $\triangle$ на три или на два треугольника таких, что каждый из них имеет внутри себя и на своих сторонах меньше узлов, чем $\triangle$. Затем такое же построение применим к тем из полученных треугольников, которые не примитивны. Ясно, что после конечного числа шагов мы придем к разбиению $\triangle$ на примитивные треугольники.

3. Покажем, что при любом разбиении простого решеточного многоугольника $M$ на примитивные тре-

угольники их число равно $2i+b-2$, где $i$ — число внутренних, а $b$ — число граничных узлов решетки соответственно. Отсюда и из равенства (5.2) получается формула Пика. Пусть В, Р и Г обозначают числа вершин, ребер и (треугольных) граней разбиения. Так как вершины разбиения совпадают с узлами, лежащими в $M$, то $В=i+b$. Кроме того, выполняются равенства $Р=Р_i+Р_b$, где $Р_i$ — число внутренних, а $Р_b$ — число граничных ребер разбиения, а также

$$Р_b=b \tag{5.4}$$

и

$$3Г=2Р_i+Р_b. \tag{5.5}$$

Равенство (5.5) получается суммированием ребер по всем (треугольным) граням с учетом того, что каждое граничное ребро принадлежит

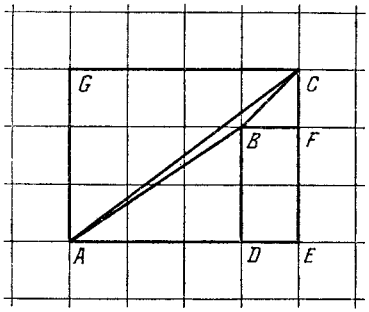



Рис 25.

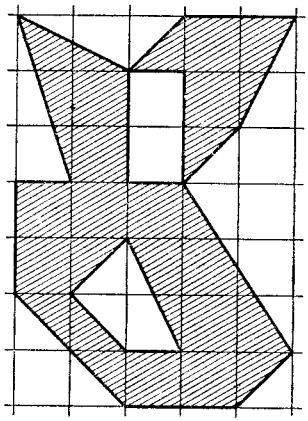


Рис. 26.

одной грани, а каждое внутреннее — в точности двум граням. Равенство (5.5) теперь можно преобразовать так:

$$3Г=2(Р-Р_b)+Р_b=2(Р-b)+b,$$

откуда $Р=\frac{1}{2}(3Г+b)$. Подставляя найденные значения В и Р в формулу Эйлера

$$В-Р+Г=1, \tag{5.6}$$

получаем $i+b-\frac{1}{2}(3Г+b)+Г=1$, или $Г=2i+b-2$, что и требовалось. Формула Пика (5.1) доказана.

Интересно отметить, что имеется аналог формулы Пика (5.1) для решеточных многоугольников с дырами (рис. 26). Он имеет вид

$$S(M)=i+\frac{b}{2}-\chi(M)+\frac{1}{2}\chi(\partial M), \tag{5.7}$$

где $\partial M$ — граница многоугольника $M$. Ясно, что формула (5.7) обобщает формулу (5.1), ибо для простого многоугольника

$$\chi(M)=1 \quad \text{и} \quad \chi(\partial M)=0.$$

Доказательство формулы (5.7) проводится так же, как и для формулы (5.1), отличаясь от него лишь в самом конце. Именно, вместо равенства (5.4) теперь имеем по определению эйлеровой характеристики границы

$$b-\mathrm{P}_b=\chi(\partial M), \tag{5.8}$$

а вместо (5.6) —

$$\mathrm{B}-\mathrm{P}+\Gamma=\chi(M). \tag{5.9}$$

Поэтому равенство (5.5) после преобразования с учетом (5.8) принимает вид

$$3\Gamma=2\mathrm{P}-b+\chi(\partial M),$$

или

$$\mathrm{P}=\frac{1}{2}[3\Gamma+b-\chi(\partial M)].$$

Подставляя в равенство (5.9) найденное значение P а также $\mathrm{B}=i+b$, получаем

$$i+b-\frac{1}{2}[3\Gamma+b-\chi(\partial M)]+\Gamma=\chi(M).$$

Отсюда находим число Г:

$$\Gamma=2i+b-2\chi(M)+\chi(\partial M).$$

Так как все грани разбиения являются примитивными треугольниками, имеющими площадь 1/2, то формула (5.7) доказана.

О других аналогах формулы Пика на плоскости и в пространстве см. интересную статью [3].

### Задачи

**14.** Докажите, что для площади $S(M)$ простого решеточного многоугольника $M$ справедливо неравенство

$$S(M) \geqslant G - \frac{L}{2} - 1. \tag{5.10}$$

Здесь $G$ обозначает общее число узлов решетки, лежащих в $M$ (т. е. $G = i + b$), $L$ — периметр многоугольника, т. е. длину его границы. Если при этом многоугольник разбит на единичные квадраты с вершинами в узлах решетки, то неравенство (5.10) превращается в равенство.

**15.** Пусть на плоскости имеется точечная решетка, описанная выше (назовем ее 1-решеткой). Проведем дополнительные горизонтальные и вертикальные прямые так, чтобы получилось разбиение плоскости на квадраты со стороной $\frac{1}{2}$. Вершины этих квадратов назовем узлами $\frac{1}{2}$-решетки. Пусть $M$ — многоугольник (простой или с дырами), вершины которого лежат в узлах $\frac{1}{2}$-решетки. Пусть $i_2$ и $b_2$ обозначают числа узлов $\frac{1}{2}$-решетки, лежащих соответственно внутри и на границе многоугольника (аналогичные числа для 1-решетки обозначим через $i_1$ и $b_1$). Докажите, что площадь многоугольника равна

$$S(M) = \frac{1}{4}\left[i_2 + \frac{b_2}{2} - \chi(M) + \frac{1}{2}\chi(\partial M)\right].$$

Если же вершины многоугольника лежат в узлах 1-решетки (и поэтому — также в узлах $\frac{1}{2}$-решетки), то

$$S(M) = \frac{1}{3}\left[(i_2 - i_1) + \frac{1}{2}(b_2 - b_1)\right],$$

т. е. члены, содержащие эйлерову характеристику, уничтожаются.

## § 6. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА

Переходим к изучению эйлеровой характеристики пространственных фигур. При разбиении такой фигуры возникают не только вершины, ребра и грани, но еще и трехмерные клетки (*трехмерность* клетки означает, что она содержит целиком некоторый шар, или, что то же, не лежит ни в какой плоскости). Эйлеровой характеристикой фигуры Ф теперь естественно назвать число

$$\chi(\Phi) = \text{В} - \text{Р} + \text{Г} - \text{К},$$

где К — число ее трехмерных клеток.

Начнем с вычисления эйлеровой характеристики самого (трехмерного) пространства $R$. Пусть в пространстве имеется конечное семейство плоскостей $Q_1, \ldots, Q_n$.

Эти плоскости разбивают пространство на конечное множество трехмерных клеток; их число будем обозначать буквой К. Пусть $Q_i$ — какая-то плоскость семейства. Ее пересечение с остальными плоскостями дает в $Q_i$ конечное множество прямых, которые, следовательно, образуют разбиение этой плоскости. Вершины, ребра и грани разбиения всех заданных плоскостей будем называть соответственно вершинами, ребрами и гранями разбиения пространства. Может случиться, что разбиение не имеет ни вершин, ни ребер; как легко видеть, это будет тогда и только тогда, когда все плоскости семейства параллельны между собой; при этом гранями разбиения естественно считать сами плоскости. Далее, нетрудно показать, что разбиение не имеет вершин в том и только в том случае, когда все заданные плоскости параллельны некоторой прямой $L$ в пространстве (рис. 27) (проверьте это!). Пусть $Q$ — плоскость, перпендикулярная такой прямой $L$. Тогда числа трехмерных клеток, граней и ребер рассматриваемого разбиения пространства равны соответственно числам граней, ребер и вершин разбиения плоскости $Q$, полученного пересечением $Q$ с плоскостями семейства. Отсюда следует, что в этом частном случае имеем $В-Р+Г-К=-1$. Оказывается, что это равенство выполняется всегда, т. е. эйлерова характеристика пространства равна $-1$ (см. (6.1)).

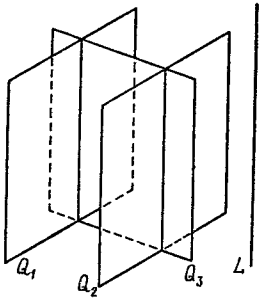


Рис. 27.

Прямые пересечения плоскостей заданного семейства будем называть *линиями разбиения*. Для вычисления эйлеровой характеристики нам понадобится понятие *кратности* вершины (а также линии) разбиения. Они определяются совершенно аналогично, а именно, как число плоскостей семейства, проходящих через эту вершину (или линию).

Лемма 5. *Если в пространстве заданы плоскости* $Q_1, \ldots, Q_m$ *и прямые* $L_1, \ldots, L_n$, *то можно провести новую плоскость* $Q$, *не параллельную ни одной из данных плоскостей и ни одной из данных прямых.*

Доказательство. В плоскости $Q_1$ возьмем какую-нибудь точку $O$ и проведем через нее плоскости $Q_2' \parallel Q_2, \ldots, Q_m' \parallel Q_m$ и прямые $L_1' \parallel L_1, \ldots, L_n' \parallel L_n$. Пусть

$\varphi_i$ — угол между плоскостями $Q_1$ и $Q'_i$ $(i=2, \ldots, m)$ и $\psi_j$ — угол между плоскостью $Q_1$ и прямой $L'_j$ $(j=1, \ldots, n)$. Как обычно, за меру угла между двумя плоскостями принимается величина соответствующего линейного угла, причем считается, что $0 \leqslant \varphi_i \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $0 \leqslant \psi_j \leqslant \frac{\pi}{2}$ для всех $i$ и $j$. Если все углы $\varphi_2, \ldots, \varphi_m, \psi_1, \ldots, \psi_n$ равны нулю, то искомой будет любая плоскость, не параллельная плоскости $Q_1$. В противном случае среди этих углов выберем наименьший положительный; пусть это будет, например, $\psi_1$. На плоскости $Q_1$ проведем через точку $O$ прямую $L$, отличную как от всех прямых $L'_1, \ldots, L'_n$, так и от линий пересечения плоскости $Q_1$ с каждой из плоскостей $Q'_2, \ldots, Q'_m$ (см. доказательство леммы 1). Через прямую $L$ проведем плоскость $Q$, образующую с плоскостью $Q_1$ положительный угол, меньший $\psi_1$. Ясно, что $Q$ не совпадает ни с одной из плоскостей $Q'_2, \ldots, Q'_m$ и не содержит ни одной из прямых $L'_1, \ldots, L'_n$ и поэтому является искомой. Лемма доказана.

Докажем формулу Эйлера для пространства $R$, т. е. проверим, что при любом его разбиении конечным числом $n$ плоскостей выполняется равенство

$$\chi(R) = \text{В} - \text{Р} + \text{Г} - \text{К} = -1. \qquad (6.1)$$

Будем считать, что рассматриваемое разбиение $\mathscr{D}_R$ имеет вершины и, следовательно, имеет ребра; доказательство формулы (6.1) в случае, когда нет вершин, предоставляется читателю.

Формулу (6.1) докажем методом движущейся плоскости. Для ее построения проведем сначала вспомогательные прямые через каждую пару вершин, не лежащих на одной линии разбиения. Например, если разбиение пространства осуществляется шестью плоскостями, полученными продолжением всех граней куба, то потребуется провести всего 16 вспомогательных прямых: через 4 пары противоположных вершин самого куба и через каждую пару противоположных вершин каждой грани. Пользуясь леммой 5, проведем плоскость $Q$, не параллельную ни одной из заданных плоскостей, ни одной линии разбиения и ни одной вспомогательной прямой. Именно $Q$ и будет движущейся плоскостью. О ней мы сделаем два предположения: будем считать, что она, во-первых, горизонтальна (этого можно добиться, поворачивая нужным образом все пространство), во-вторых, расположена в ее начальном положении ниже всех вершин. Из первого предполо-

жения следует, в частности, что все вершины разбиения лежат на разной высоте в пространстве; пронумеруем их в порядке возрастания высоты, т. е. пусть $v_1$ обозначает самую нижнюю вершину, $v_2$ — следующую за ней по высоте, наконец, $v_B$ — самую верхнюю.

Для доказательства равенства (6.1) можно, например, выразить числа Р, Г и К через В и $n$. При этом, по аналогии с доказательством формулы (1.2), опять потребуется дополнительная информация, и даже гораздо большая, чем в плоском случае, а именно, нужно будет учитывать кратности всех вершин, общее число $m$ линий разбиения и их кратности, а также число линий разбиения, проходящих через каждую вершину. Для простоты такое доказательство проведем только в частном случае, когда кратность каждой вершины равна 3, а кратность каждой линии разбиения равна 2. Впрочем, приводимое ниже рассуждение годится и в общем случае (что будет использовано ниже), а разница частного и общего случаев проявляется только в формулах для Р, Г и К.

Рассмотрим движущуюся плоскость $Q$ в ее начальном положении. При пересечении $Q$ с плоскостями семейства в ней получается семейство из $n$ прямых, которые образуют разбиение $\mathscr{D}_Q$ плоскости $Q$. Каждой линии разбиения $\mathscr{D}_R$ пространства соответствует своя вершина разбиения $\mathscr{D}_Q$ плоскости, а именно, точка пересечения этой линии с $Q$. Аналогично, граням и трехмерным клеткам разбиения $\mathscr{D}_R$, пересекаемым плоскостью $Q$, отвечают соответственно ребра и грани разбиения $\mathscr{D}_Q$. Таким образом, это разбиение плоскости $Q$ имеет $m$ вершин, и кратность каждой вершины равна 2. Согласно формулам (1.3) и (1.4) разбиение $\mathscr{D}_Q$ меет соответственно $n+2m$ ребер и $1+n+m$ граней. Поэтому плоскость $Q$ пересекает в ее начальном положении

| | |
|---|---|
| $m$ | ребер, |
| $n+2m$ | граней и |
| $1+n+m$ | трехмерных клеток |

разбиения $\mathscr{D}_R$.

Пусть теперь плоскость $Q$ поднимается вверх, оставаясь все время горизонтальной. Из первого предположения об этой плоскости и из леммы 5 следует, что каждое ребро разбиения $\mathscr{D}_R$ (и аналогично, каждая его грань и трехмерная клетка), за исключением тех, которые пересекаются плоскостью $Q$ в ее начальном положе-

нии, имеет единственную самую нижнюю вершину. Отсюда — два вывода. Во-первых, *новые* клетки разбиения $\mathscr{D}_R$ оявляются только в моменты прохождения плоскости $Q$ через его вершины. Во-вторых, число новых ребер, граней и трехмерных клеток, возникающих при прохождении $Q$ через вершину $v_i$, равно соответственно числу вершин, *ограниченных* ребер и *ограниченных* граней разбиения плоскости $Q$, которое образуют прямые ее пересечения с плоскостями семейства, проходящими через точку $v_i$, в момент, когда $Q$ находится чуть выше $v_i$ (новые клетки разбиения $\mathscr{D}_R$ как бы «рождаются» из вершины $v_i$), см. рис. 28. В силу предположения о кратностях вершин и линий это разбиение плоскости $Q$ осуществляется тремя прямыми общего положения (см. задачу 3). Следовательно, возникают три новых ребра, три грани и одна трехмерная клетка. Так будет при прохождении плоскости через каждую вершину. Поэтому

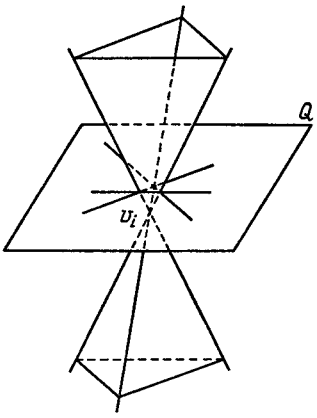


Рис. 28.

$$\text{Р}=m+3\text{В},\ \ \Gamma=n+2m+3\text{В},\ \ \text{К}=1+n+m+\text{В}. \qquad (6.2)$$

Отсюда

$$\chi(R)=\text{В}-\text{Р}+\Gamma-\text{К}=\text{В}-m-3\text{В}+n+2m+$$
$$+3\text{В}-1-m-n-\text{В}=-1.$$

Итак, формула Эйлера (6.1) доказана в предположении, что каждая вершина разбиения имеет кратность 3, а каждая линия разбиения — кратность 2.

В общем случае мы не будем находить формулы, выражающие Р, Г и К через В, $n$ и другие данные, а употребим прием, уже использованный ранее на плоскости. Именно, распишем знакопеременную сумму В—Р+Г—К по вершинам, т. е. представим ее в виде

$$\chi(R)=\text{В}-\text{Р}+\Gamma-\text{К}=(-\text{Р}_0+\Gamma_0-\text{К}_0)+$$
$$+(1-\text{Р}_1+\Gamma_1-\text{К}_1)+(1-\text{Р}_2+\Gamma_2-\text{К}_2)+\ \ldots$$
$$\ldots+(1-\text{Р}_\text{в}+\Gamma_\text{в}-\text{К}_\text{в}), \qquad (6.3)$$

где $P_0$, $\Gamma_0$ и $K_0$ — числа клеток разбиения пространства, которые встречает плоскость $Q$ в ее начальном положении, $P_1$, $\Gamma_1$ и $K_1$ — числа клеток разбиения, появляющихся после прохождения $Q$ через первую вершину, и т. д. Как уже сказано, сумма

$$S_0 = P_0 - \Gamma_0 + K_0$$

равна эйлеровой характеристике плоскости, а каждая сумма

$$S_i = P_i - \Gamma_i + K_i \quad (i = 1, \ldots, B)$$

равна эйлеровой характеристике фигуры, составленной из ограниченных клеток разбиения плоскости $Q$, порожденного прямыми ее пересечения с теми плоскостями семейства, которые проходят через вершину $v_i$. В силу утверждения задачи 7 имеем $S_i = 1$. Подставляя найденные значения сумм $S_i$ в (6.3), получаем $\chi(R) = -1$.

## § 7. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

*Выпуклым многогранником* называется пересечение конечного числа полупространств при условии, что оно, во-первых, *ограничено*, т. е. содержится в некотором шаре, во-вторых, *трехмерно*, т. е. содержит в себе некоторый другой шар, или, что то же, не лежит ни в какой плоскости. В этом определении выпуклого многогранника еще предполагается, что каждое полупространство содержит ограничивающую его плоскость.

Все точки выпуклого многогранника делятся на внутренние и граничные. Говорят, что точка многогранника $X$ является *внутренней*, если существует шар с центром в этой точке, целиком лежащий в $X$. Точка многогранника является *граничной*, если любой шар с центром в этой точке содержит как точки $X$, так и точки его дополнения относительно пространства. Все граничные точки образуют *границу* многогранника. Эта граница состоит из конечного числа *граней*, которые являются выпуклыми многоугольниками. Стороны и вершины этих многоугольников называются *ребрами* и *вершинами* многогранника соответственно.

Докажем знаменитую *формулу Эйлера*

$$B - P + \Gamma = 2, \qquad (7.1)$$

*справедливую для всякого выпуклого многогранника.*

Доказательство. Как обычно, предположим, что все его вершины расположены на разной высоте и занумерованы в таком порядке $v_1, v_2, \ldots, v_B$, чтобы каждая следующая была выше предыдущей. Обозначим через $\Gamma_i$ $(i=1, \ldots, B-1)$ число граней многогранника, для которых точка $v_i$ является самой нижней вершиной, или, другими словами, которые «выходят» вверх из вершины $v_i$. Пусть $P_i$ $(i=1, \ldots, B-1)$ обозначим число ребер многогранника, которые имеют вершину $v_i$ своим нижним концом (или «выходят» вверх из этой вершины). Ясно, что для самой верхней вершины $v_B$ таких граней

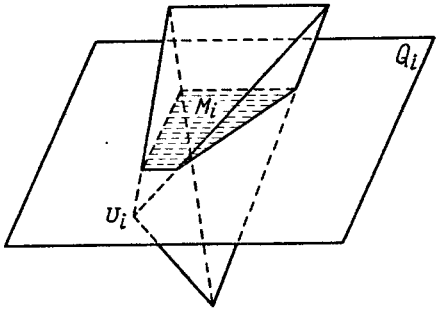



Рис. 29.

и ребер нет. Так как к вершине $v_1$ примыкает одинаковое число ребер и граней, и все они «выходят» из нее вверх, то

$$P_1=\Gamma_1. \tag{7.2}$$

Рассечем теперь многогранник $X$ горизонтальной плоскостью $Q_i$, расположенной чуть выше вершины $v_i$ $(i=1, \ldots, B-1)$. В сечении получится выпуклый многоугольник $M_i$. Каждому из $P_i$ ребер многогранника, выходящему вверх из точки $v_i$, соответствует своя вершина многоугольника $M_i$. Аналогично, каждой из $\Gamma_i$ граней, выходящих вверх из этой же точки, соответствует своя сторона многоугольника $M_i$. Названные вершины и стороны многоугольника образуют простую (незамкнутую) ломаную линию (возможно, состоящую только из одной вершины). Так как эйлерова характеристика такой ломаной равна единице, то

$$P_i-\Gamma_i=1 \qquad (i=2, \ldots, B-1) \tag{7.3}$$

(рис. 29, где показан один из простейших случаев: $X$ — тетраэдр, ломаная состоит из одного отрезка). Общее число ребер многогранника равно $P = P_1 + \ldots + P_{в-1}$, а общее число его граней равно $Г = Г_1 + \ldots + Г_{в-1}$. Поэтому, используя равенства (7.2) и (7.3), получаем

$$\begin{aligned} В - Р + Г &= В - (P_1 + \ldots + P_{в-1}) + (Г_1 + \ldots + Г_{в-1}) = \\ &= В - (P_1 + \ldots + P_{в-1}) + P_1 + (P_2 - 1) + \ldots \\ &\ldots + (P_{в-1} - 1) = В - (P_1 + \ldots + P_{в-1}) + \\ &+ (P_1 + \ldots + P_{в-1}) - (В - 2) = 2. \end{aligned}$$

Итак, формула Эйлера (7.1) доказана.

Заметим, что эта формула выражает свойство границы $\partial X$ многогранника. Однако приведенное рассуждение еще не доказывает, что эйлерова характеристика границы равна 2: ведь в нем было принято во внимание только «естественное» *) разбиение границы на клетки, тогда как для доказательства равенства

$$\chi(\partial X) = 2 \tag{7.4}$$

надо показать, что формула (7.1) справедлива при любом разбиении.

Итак, предположим, что, кроме естественного, имеется еще другое («новое») разбиение границы $\partial X$ на выпуклые клетки размерностей от 0 до 2. Будем придерживаться второй точки зрения на оба разбиения, т. е. считать, что все клетки открыты, и поэтому различные клетки одного разбиения не имеют общих точек. Пусть в, р, г — числа вершин, ребер и граней нового разбиения. Нам надо доказать равенство $в - р + г = 2$. Так как все клетки выпуклы, то каждая новая клетка содержится в точности в одной старой. Кроме того, все новые клетки, входящие в одну старую, образуют ее разбиение. Поэтому, если $F$ — старая открытая двумерная клетка, т. е. грань многогранника без ее границы, $в_1$, $р_1$, $г_1$ — числа новых клеток разных размерностей, содержащихся в $F$, то

$$в_1 - р_1 + г_1 = \chi(F) = 1. \tag{7.5}$$

Аналогично, если $E$ — старое открытое ребро, т. е. естественное ребро многогранника без его концов, $в_2$ и $р_2$ — числа новых клеток, содержащихся в $E$, то

$$в_2 - р_2 = \chi(E) = -1. \tag{7.6}$$

Так как все новые клетки содержатся в $\partial X$, то сумму $в - р + г$ можно расписать по старым клеткам, и поэтому из равенств (7.5) и (7.6) получаем

$$\chi(\partial X) = в - р + г = В - Р + Г = 2.$$

Итак, равенство (7.4) доказано

*) То есть его «настоящими» вершинами, ребрами и гранями.

Последнее рассуждение показывает, между прочим, что эйлерова характеристика границы многогранника равна сумме эйлеровых характеристик ее открытых клеток. Это свойство называется *аддитивностью* и будет дальше рассмотрено в более общей форме.

Прежде чем выводить следствия из формулы Эйлера (7.1), установим некоторые простые, но полезные соотношения. Заметим, что до конца этого параграфа под словом многогранник всегда будет пониматься только выпуклый многогранник.

Назовем *степенью* вершины многогранника число выходящих из нее ребер. Ясно, что степень каждой вершины не меньше трех. Обозначим через $B_3$ число вершин степени 3, через $B_4$ — число вершин степени 4 и т. д. Тогда

$$B = B_3 + B_4 + \ldots + B_m = \sum_{i=1}^{m} B_i. \qquad (7.7)$$

Здесь $m$ — максимальная степень вершины и $B_1 = B_2 = 0$. Часто для нас будет безразлично, каково точное значение числа $m$; поэтому формулу (7.7) запишем в сокращенном виде:

$$B = B_3 + B_4 + \ldots = \sum_{i \geqslant 3} B_i. \qquad (7.7')$$

Каждая грань многогранника есть выпуклый многоугольник, число сторон (или углов) которого равно 3 или 4 и т. д. Обозначим через $\Gamma_i$ число $i$-угольных граней многогранника ($i = 3, 4, \ldots$). Тогда

$$\Gamma = \Gamma_3 + \Gamma_4 + \ldots = \sum_{i \geqslant 3} \Gamma_i. \qquad (7.8)$$

Суммируя ребра по всем вершинам и учитывая при этом, что каждое ребро соединяет две вершины, т. е. оно считается дважды, получаем

$$2P = 3B_3 + 4B_4 + 5B_5 + \ldots = \sum_{i \geqslant 3} iB_i. \qquad (7.9)$$

Аналогично, суммируя ребра по всем граням и учитывая, что каждое ребро принадлежит границам двух граней и, значит, считается дважды, имеем

$$2P = 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + \ldots = \sum_{i \geqslant 3} i\Gamma_i. \qquad (7.10)$$

Так как степень каждой вершины не меньше трех, или, что то же, из каждой вершины выходит не меньше трех

граней, то

$$3\Gamma \leqslant 3B_3 + 4B_4 + 5B_5 + \ldots = \sum_{i \geqslant 3} iB_i. \qquad (7.11)$$

Так как каждая грань имеет не менее трех вершин, то

$$3B \leqslant 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + \ldots = \sum_{i \geqslant 3} i\Gamma_i. \qquad (7.12)$$

Обратите внимание на то, что во все соотношения (7.7) — (7.12), как и в формулу Эйлера (7.1), пара чисел B и Г (а также пары чисел $B_3$ и $\Gamma_3$, $B_4$ и $\Gamma_4$ и т. д.) входят симметрично, т. е. эти соотношения остаются справедливыми, если заменить в них число B числом Г, число $B_3$ числом $\Gamma_3$ и т. д., и наоборот. Поэтому любому утверждению, например о гранях многогранника, выведенному из формулы (7.1) и соотношений (7.7) — (7.12), соответствует аналогичное (двойственное) утверждение о его вершинах. В этом состоит так называемый *принцип двойственности*. В частности, можно сказать, что двойственными друг другу являются, например, равенства (7.9) и (7.10), а также неравенства (7.11) и (7.12). Формула Эйлера двойственна сама себе.

Переходим к выводу следствий из соотношений (7.1) и (7.7) — (7.12).

Из неравенства (7.12) и равенства (7.10) получаем $B \leqslant \frac{1}{3} \sum_{i \geqslant 3} i\Gamma_i$ и $P = \frac{1}{2} \sum_{i \geqslant 3} i\Gamma_i$. Подставляя в (7.1), имеем

$$\frac{1}{3} \sum_{i \geqslant 3} i\Gamma_i - \frac{1}{2} \sum_{i \geqslant 3} i\Gamma_i + \sum_{i \geqslant 3} \Gamma_i \geqslant 2,$$

или

$$6 \sum_{i \geqslant 3} \Gamma_i - \sum_{i \geqslant 3} i\Gamma_i \geqslant 12.$$

Выделим в обеих суммах члены, содержащие $\Gamma_3$, $\Gamma_4$ и $\Gamma_5$, тогда

$$6(\Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5) + 6 \sum_{i \geqslant 6} \Gamma_i - (3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5) - \sum_{i \geqslant 6} i\Gamma_i \geqslant 12,$$

или

$$3\Gamma_3 + 2\Gamma_4 + \Gamma_5 \geqslant 12 + \sum_{i \geqslant 6} (i-6)\Gamma_i.$$

Так как сумма, стоящая в правой части этого неравен-

пар $(m, n)$. Остается только проверить, какие из этих девяти пар могут фактически осуществляться.

Итак, пусть имеем правильный многогранник типа $(m, n)$. Тогда $\Gamma = \Gamma_m$ и ввиду (7.10) $2\Pi = m\Gamma$. Аналогично, $B = B_n$ и ввиду (7.9) $2\Pi = nB$. Решая систему уравнений $B - \Pi + \Gamma = 2$, $2\Pi = m\Gamma$, $2\Pi = nB$ относительно чисел B, $\Pi$ и $\Gamma$, получаем

$$B = \frac{4m}{2m + 2n - mn},$$

$$\Pi = \frac{2mn}{2m + 2n - mn},$$

$$\Gamma = \frac{4n}{2m + 2n - mn}.$$

Так как эти числа положительны, то

$$2m + 2n - mn > 0,$$

или

$$(m-2)(n-2) < 4. \qquad (7.15)$$

Теперь ясно, что из всех девяти пар чисел $(m, n)$ неравенству (7.15) удовлетворяют только следующие пять: (3,3), (4,3), (3,4), (5,3), (3,5). Комбинаторно правильные многогранники, соответствующие таким парам, действительно существуют: это — тетраэдр, гексаэдр (или шестигранник), октаэдр (или восьмигранник), додекаэдр (или двенадцатигранник), икосаэдр (или двадцатигранник). В таблице 3 приведены значения чисел $m$, $n$, B, $\Pi$ и $\Gamma$ для этих многогранников.

Дополним этот параграф следующим замечанием, адресуя его читателю, знакомому с понятием $n$-мерного пространства. Если в этом пространстве имеется выпуклый многогранник, не лежащий ни в какой $(n-1)$-мерной гиперплоскости, то его граница естественно разбивается на клетки размерностей от 0 до $n-1$. Пусть $\alpha_i$ обозначает число клеток размерности $i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Тогда имеется следующий аналог формулы Эйлера (7.1):

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \ldots + (-1)^{n-1}\alpha_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}$$

### Задачи

**16.** Докажите, что для любого выпуклого многогранника число $B + \Pi + \Gamma$ четно.

**17.** Докажите формулу Эйлера (7.1) методом движущейся плоскости без предположения о том, что вершины многогранника находятся на разной высоте.

**18.** Докажите, что если каждая пара вершин выпуклого многогранника соединена ребром, то сам многогранник является тетраэдром.

Заметим, что требование выпуклости в этой задаче нельзя отбросить, как показывает пример тела, состоящего из трех тетраэдров, $ADCF$, $ADBE$ и $BECF$, из которых каждые два имеют общее ребро (рис. 30).

Второе замечание к этой задаче: в многомерном пространстве аналогичное утверждение не имеет места. Например, в четырехмерном пространстве, кроме четырехмерного симплекса (аналога тетраэдра), существуют выпуклые многогранники с любым числом вершин, не меньшим пяти, каждая пара которых соединена ребром.

**19.** Сформулируйте и докажите утверждение, двойственное утверждению задачи 18.

**20.** («Лемма Коши»). Пусть каждое ребро выпуклого многогранника отмечено знаком плюс или минус. При обходе вокруг вершины по ребрам могут быть перемены знаков (с плюса на минус и наоборот), причем ясно, что число таких перемен четно (возможно, равно нулю). Докажите лемму Коши: *существует такая вершина многогранника, что при обходе вокруг нее число перемен знаков не больше* 2.

Сформулируйте и докажите двойственное утверждение.

Заметим, что эта лемма была использована в 1813 г. французским математиком О. Л. Коши (1789—1857) для доказательства теоремы о жесткости границ выпуклых многогранников (подробнее см. об этом в книге [4]).

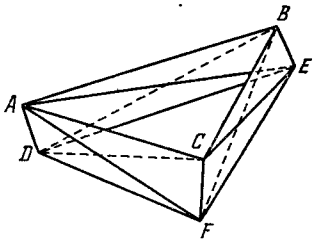


Рис. 30.

**21.** Выпуклый многогранник имеет пять граней. Каким может быть число его вершин и число его ребер? Сформулируйте и решите двойственную задачу.

**22.** Используя равенства (7.1) и (7.7) — (7.10), докажите формулу

$$\sum_{i\geqslant 3}(2i+2n-ni)\,B_i+2\sum_{i\geqslant 3}(n-i)\,\Gamma_i=4n, \qquad (7.16)$$

где $n$ — любое натуральное число. В этой формуле «исключен» член $\Gamma_n$.

Запишите и докажите двойственную формулу.

**23.** Пользуясь формулой (7.16) при $n=7$, докажите следующую теорему. *Пусть степень каждой вершины выпуклого многогранника равна* 3, *и пусть он не имеет ни треугольных, ни четырехугольных граней. Тогда у него имеется пятиугольная грань, которая касается другой пятиугольной или шестиугольной грани.* (Говорят, что две грани касаются, если они имеют общую сторону.)

Сформулируйте и докажите двойственную теорему.

## § 8. АКСИОМЫ ЭЙЛЕРОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Подведем главные итоги того, что сделано нами до сих пор, и наметим кратко программу дальнейшего изложения. Мы показали, что каждой фигуре $M$ из некоторого класса (скажем, класса многоугольников) можно

сопоставить ее эйлерову характеристику $\chi(M)$ с помощью разбиения фигуры на клетки разных размерностей. Иными словами, на множестве фигур была определена функция $\chi$ по формуле $\chi(M)=В-Р+Г$, и наша главная задача заключалась в доказательстве того, что эта функция определена *корректно*, т. е. не зависит от способа разбиения фигуры. Обычно определения такого типа называют *конструктивными*, так как в них сразу дается правило (конструкция), по которому определяемую функцию можно вычислить.

Теперь будет дано новое (*аксиоматическое*) определение эйлеровой характеристики. Именно, сначала мы определим некоторый класс фигур, называемых элементарными. Затем определим эйлерову характеристику как функцию $\chi$ на этом классе так, чтобы она удовлетворяла заранее указанным простым и естественным требованиям (аксиомам). В качестве аксиом будут выбраны свойства эйлеровой характеристики, уже знакомые читателю. Главной задачей теперь будет доказательство того, что такая функция $\chi$ действительно существует и определяется единственным образом. Мы докажем, кроме того, что конструктивное и аксиоматическое определения эйлеровой характеристики равносильны, т. е. дают одну и ту же функцию $\chi$, определенную на элементарных фигурах.

Новый способ определения эйлеровой характеристики обладает определенными преимуществами. Главное из них состоит в следующем. Он позволяет вычислить значение функции $\chi$ целой фигуры $M$, зная ее значения на более простых частях, из которых составлена эта фигура (как правило — из выпуклых многоугольников). Важно заметить, что эти части не обязаны быть гранями, ребрами или вообще клетками разбиения.

Аксиоматический подход к определению эйлеровой характеристики был предложен в 1955 г. швейцарским математиком Г. Хадвигером (1908—1981).

Переходим к описанию (тоже аксиоматическому!) множества *элементарных фигур* $\mathcal{M}$. Это множество $\mathcal{M}$ фигур на плоскости определяется заданием следующих двух аксиом:

1) каждый выпуклый многоугольник $C$ содержится в $\mathcal{M}$ (по другой терминологии: $C$ является элементом $\mathcal{M}$; в символической записи: $C\in\mathcal{M}$);

2) Если фигуры $A$ и $B$ содержатся в $\mathcal{M}$, то в $\mathcal{M}$ содержатся их объединение $A\cup B$ и пересечение $A\cap B$ (в сим-

волической записи: если $A \in \mathcal{M}$ и $B \in \mathcal{M}$, то $A \cup B \in \mathcal{M}$ и $A \cap B \in \mathcal{M}$).

Выведем простейшие следствия из этих аксиом. Пересечение двух выпуклых многоугольников может быть выпуклым многоугольником, отрезком или точкой; оно может не содержать ни одной точки (т. е. быть *пустой* фигурой) (рис. 31). Отрезки и точки впредь будем называть *вырожденными* (выпуклыми) многоугольниками. Пустая фигура обозначается знаком $\varnothing$. Итак, из аксиом следует, что в класс $\mathcal{M}$ элементарных фигур должны

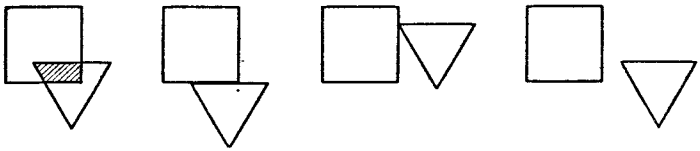


Рис. 31

входить все вырожденные многоугольники, а также пустой многоугольник $\varnothing$.

Из аксиомы 2) по индукции следует, что множество $\mathcal{M}$ должно содержать объединение и пересечение любого конечного числа своих элементов $A_i$ (символически: если $A_i \in \mathcal{M}$ $(i = 1, \ldots, n)$, то $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{M}$ и $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{M}$).

Докажем, что на плоскости существует множество фигур, удовлетворяющее аксиомам 1) и 2). Таким будет множество, состоящее из всевозможных конечных объединений выпуклых многоугольников (возможно, вырожденных). Именно это множество впредь будем обозначать буквой $\mathcal{M}$, а его элементы — называть *элементарными фигурами* (для краткости — просто *фигурами*). Пусть $A$ и $B$ — фигуры, т. е. пусть

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i, \quad B = \bigcup_{j=1}^{m} D_j. \tag{8.1}$$

где $C_i$ и $D_j$ — выпуклые многоугольники. Ясно, что аксиома 1) выполняется, так как в выражении (8.1) число $n$ или $m$ слагаемых многоугольников можно взять равным 1. Ясно также, что в класс $\mathcal{M}$ входит объединение $A \cup B$, которое имеет такой же вид (8.1), как и каждое из слагаемых $A$ и $B$. Остается доказать, что

пересечение $A \cap B$ можно представить в виде объединения конечного числа выпуклых многоугольников. Это сразу следует из формулы

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} D_j\right) = \bigcup_{i,\,j} (C_i \cap D_j) \tag{8.2}$$

(«распределительного закона»), где индексы $i$ и $j$ в правой части имеют те же значения, что и в левой.

Заметим, что, кроме описанного множества $\mathcal{M}$, на плоскости имеются другие классы фигур, удовлетворяющие аксиомам 1) и 2), но мы их рассматривать не будем.

Как легко проверить, элементарными фигурами являются, например, многоугольники (не обязательно выпуклые), определенные в § 2. С другой стороны, связная элементарная фигура, равная объединению невырожденных выпуклых многоугольников, является многоугольником. Это проверяется так же, как и то, что простая дыра является простым многоугольником (см. § 2, с. 18).

Кроме многоугольников, в множество $\mathcal{M}$ входят, конечно, плоские графы. Нетрудно убедиться, что всякая элементарная фигура может быть представлена в виде объединения нескольких многоугольников и одного (возможно, несвязного) плоского графа, причем некоторые из этих «слагаемых» могут отсутствовать.

По аналогии с классом $\mathcal{M}$ плоских элементарных фигур определяется класс $\mathcal{M}(L)$ элементарных фигур на прямой $L$. Каждый элемент класса $\mathcal{M}(L)$ является объединением конечного числа отрезков, причем эти отрезки могут вырождаться в точки. Легко доказать, что множество $\mathcal{M}(L)$ удовлетворяет аксиомам 1) и 2) (делается это точно так же, как для класса $\mathcal{M}$)

В пространстве $R$ мы будем рассматривать только класс $\mathcal{M}(R)$ элементарных фигур, каждая из которых является объединением конечного числа выпуклых многоугольников (возможно, вырожденных), причем плоскости разных многоугольников не обязательно совпадают. В этот класс входят, например, границы выпуклых многогранников.

Переходим к определению эйлеровой характеристики, при этом, для определенности, речь пойдет о множестве фигур $\mathcal{M}$. Скажем, что на $\mathcal{M}$ задана *эйлерова характеристика* $\chi$, если каждой элементарной фигуре $A \in \mathcal{M}$ поставлено в соответствие число $\chi(A)$ так, что выполнены следующие аксиомы:

($\alpha$) *эйлерова характеристика пустой фигуры равна нулю, т. е.*

$$\chi(\varnothing)=0;$$

($\beta$) *для каждого (в том числе вырожденного) непустого выпуклого многоугольника* $C$ имеем

$$\chi(C)=1;$$

($\gamma$) *для любых элементарных фигур* $A$ *и* $B$

$$\chi(A\cup B)=\chi(A)+\chi(B)-\chi(A\cap B).$$

Свойство ($\gamma$) называется *аддитивностью* эйлеровой характеристики. Поэтому короче можно сказать, что эйлерова характеристика есть аддитивная функция элементарной фигуры, «нормированная» условием ($\beta$).

Со свойством аддитивности функции $\chi$ мы уже встречались раньше, правда, при более ограничительных условиях, когда многоугольники $A$ и $B$ не имели общих точек (см. с. 48). Читатель, несомненно, знаком с другими аддитивными функциями многоугольника: достаточно сказать, что этим свойством обладает его площадь. В самом деле, для нахождения площади объединения двух многоугольников надо взять сумму их площадей и вычесть из нее площадь их пересечения, так как последняя учитывается в сумме дважды.

Выведем некоторые следствия из аксиом эйлеровой характеристики.

Пусть заданы $n$ элементарных фигур $A_1, \ldots, A_n$, или, как мы будем говорить, пусть задана $n$-элементная часть всего множества $\mathscr{M}$. Запишем это следующим образом: $\mathscr{A}=\{A_1, \ldots, A_n\}$. Пусть $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ есть объединение всех заданных фигур. Тогда эйлерова характеристика фигуры $A$, если она существует, выражается через эйлеровы характеристики фигур $A_1, \ldots, A_n$ следующим образом:

$$\chi(A)=\sum^{(1)}\chi(A_i)-\sum^{(2)}\chi(A_{i_1}\cap A_{i_2})+\sum^{(3)}\chi(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3})-$$
$$-\sum^{(4)}\chi(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\cap A_{i_4})+\ \cdots\ +(-1)^{n-2}\sum^{(n-1)}\chi(A_{i_1}\cap\ldots$$
$$\ldots\cap A_{i_{n-1}})+(-1)^{n-1}\chi(A_1\cap\ \cdots\ \cap A_n). \quad (8.3)$$

Поясним эту формулу. В ней $\sum^{(1)}$ обозначает сумму, взятую по всем фигурам $A_i$, или, что то же, по всем

1-элементным частям множества $\mathscr{A}$; $\sum^{(2)}$ обозначает сумму, взятую по всем парам фигур $\{A_{i_1}, A_{i_2}\}$, где $i_1 \neq i_2$, или, что то же, эта сумма берется по всем 2-элементным частям множества $\mathscr{A}$; $\sum^{(3)}$ обозначает сумму, взятую по всем тройкам фигур $\{A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}\}$, где индексы $i_1$, $i_2$ и $i_3$ принимают различные значения; иными словами, эта сумма берется по всем 3-элементным частям множества $\mathscr{A}$, и т. д.

Если $n=2$, то формула (8.3) есть не что иное, как аксиома ($\gamma$). Поэтому доказывать ее следует только при $n \geqslant 3$.

Пусть $n=3$. Тогда, используя аксиому ($\gamma$), имеем

$$\chi(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \chi[(A_1 \cup A_2) \cup A_3] = \chi(A_1 \cup A_2) + \\ + \chi(A_3) - \chi[(A_1 \cup A_2) \cap A_3]. \quad (8.4)$$

Используя частный случай

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

распределительного закона (8.2), получаем

$$\chi[(A_1 \cup A_2) \cap A_3] = \chi[(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)] = \chi(A_1 \cap A_3) + \\ + \chi(A_2 \cap A_3) - \chi(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Подставим это выражение для $\chi[(A_1 \cup A_2) \cap A_3]$ в формулу (8.4) и распишем в ней же $\chi(A_1 \cup A_2)$ по аксиоме ($\gamma$). Тогда имеем окончательно

$$\chi(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \chi(A_1) + \chi(A_2) + \chi(A_3) - \chi(A_1 \cap A_2) - \\ - \chi(A_1 \cap A_3) - \chi(A_2 \cap A_3) + \chi(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \quad (8.5)$$

Итак, при $n=3$ формула (8.3) доказана. Докажем ее общий случай индукцией по числу $n$, предполагая, что она справедлива при числе «слагаемых» фигур, равном $n-1$, т. е. что выполняется равенство

$$\chi\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) = \sum^{(1)} \chi(A_i) - \sum^{(2)} \chi(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \\ + \sum^{(3)} \chi(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \ldots + (-1)^{n-3} \sum^{(n-2)} \chi(A_{i_1} \cap \ldots \\ \ldots \cap A_{i_{n-2}}) + (-1)^{n+2} \chi(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}). \quad (8.6)$$

По аксиоме ($\gamma$) имеем

$$\chi\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \chi\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + \chi(A_n) - \chi\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right]. \quad (8.7)$$

Используя распределительный закон в следующей форме

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)\cap B=\bigcup_{i=1}^{m}(A_i\cap B)$$

и предположение индукции (8.6), получаем

$$\chi\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\cap A_n\right]=\chi\left[\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_i\cap A_n)\right]=\sum{}^{(1)}\chi(A_i\cap A_n)-$$

$$-\sum{}^{(2)}\chi(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_n)+\ \ldots\ +(-1)^{n-3}\sum{}^{(n-2)}\chi(A_{i_1}\cap\ldots$$

$$\ldots\ \cap A_{i_{n-2}}\cap A_n)+(-1)^{n-2}\chi(A_1\cap\ \ldots\ \cap A_{n-1}\cap A_n), \quad (8.8)$$

где в каждой из сумм все индексы $i_1$, $i_2$ и т. д. различны и пробегают значения от 1 до $n-1$.

Подставим теперь выражения (8.6) и (8.8) в формулу (8.7). В равенстве (8.6) сумма $\sum^{(1)}$ берется по всем фигурам $A_i$, кроме $A_n$, да еще в (8.7) имеется слагаемое $\chi(A_n)$. Объединяя все эти слагаемые, получаем сумму $\sum^{(1)}$ доказываемой формулы (8.3) уже по всем без исключения фигурам. Далее, в правой части (8.6) сумма $\sum^{(2)}$ берется по всем таким парам фигур $\{A_{i_1}, A_{i_2}\}$, которые не содержат фигуры $A_n$. Чтобы получить *все* пары фигур (с разными индексами), к упомянутым парам надо добавить еще пары $\{A_1, A_n\}, \ldots, \{A_{n-1}, A_n\}$. Как раз последним парам в формуле (8.8) отвечает сумма $\sum^{(1)}$. Поэтому, прибавляя к сумме $\sum^{(2)}$ из (8.6) сумму $\sum^{(1)}$ из (8.8), получаем сумму $\sum^{(2)}$ доказываемого равенства (8.3) и притом все слагаемые этой суммы имеют знак минус. Аналогично, сумма $\sum^{(3)}$ доказываемой формулы получается сложением суммы $\sum^{(3)}$ из (8.6) и суммы $\sum^{(2)}$ из (8.8) и т. д. Равенство (8.3) доказано.

Выпишем еще один частный случай этого равенства, нужный в дальнейшем:

$$\chi\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right)=\sum{}^{(1)}\chi(A_i)-\sum{}^{(2)}\chi(A_{i_1}\cap A_{i_2})+$$

$$+\sum{}^{(3)}\chi(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3})-\chi(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4). \quad (8.9)$$

Заметим, что в формуле (8.3) не обязательно требовать, чтобы все фигуры $A_1, \ldots, A_n$ были различны. Иначе говоря, некоторые фигуры $A_i$ могут входить в множество $\mathscr{A}$ несколько раз; в частности, $\mathscr{A}$ может состоять из $n$ экземпляров одной и той же фигуры.

Формула (8.3) носит название «принципа включений и исключений». Так как доказательство этого принципа опирается только на аксиому ($\gamma$) и на распределительный закон, то он справедлив для любых аддитивных функций многоугольника, например для площади (подробнее об этом см. в статье [7]). Другим примером аддитивной функции, но не многоугольника, а конечного множества, является число его элементов, или, как говорят, его мощность. Иными словами, на $n$-элементном множестве эта функция принимает значение, равное $n$. На применении принципа включений и исключений для этого случая основано решение задач 24 и 25.

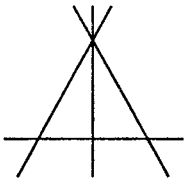


Рис. 32.

Пусть теперь в формуле (8.3) все фигуры $A_i$ являются непустыми выпуклыми многоугольниками, тогда, согласно аксиоме ($\beta$), каждое слагаемое суммы $\sum^{(1)}$ равно 1. Из аксиом ($\alpha$) и ($\beta$) следует, что каждое из слагаемых суммы $\sum^{(2)}$ равно 0 или 1 в зависимости от того, пусто или нет пересечение пары выпуклых многоугольников, соответствующих этому слагаемому. Аналогично, каждое слагаемое суммы $\sum^{(3)}$ равно 0 или 1 в зависимости от того, пусто или нет пересечение тройки выпуклых многоугольников, соответствующих этому слагаемому, и т. д. Так получается следующая формула для вычисления эйлеровой характеристики фигуры $A$, равной объединению конечного числа $n$ непустых выпуклых многоугольников $A_j$:

$$\chi(A)=q_1-q_2+q_3-\ \cdots\ +(-1)^{n-1}q_n. \qquad (8.10)$$

Здесь $q_i$ $(i=1, \ldots, n)$ обозначает число таких $i$-элементных частей множества $\mathscr{A}=\{A_1, \ldots, A_n\}$, что многоугольники, входящие в каждую из этих частей, имеют непустое пересечение.

Таким образом, если на классе $\mathscr{M}$ всех элементарных фигур существует эйлерова характеристика $\chi$, удовлетворяющая аксиомам ($\alpha$) — ($\gamma$), то она определяется *однозначно*: ее значение дается формулой (8.10). В частности, эйлерова характеристика любой элементарной фигуры является целым числом.

Рассмотрим простой пример. Пусть множество $\mathscr{A}$ состоит из четырех отрезков, а фигура $A$ есть объединение этих отрезков (рис. 32). В этом случае имеется 6 пар отрезков с непустым пересечением, одна тройка

отрезков с непустым пересечением; пересечение всех четырех отрезков пусто. Поэтому имеем $\chi(A)=4-6+$ $+1-0=-1$.

### Задачи

**24.** В научно-исследовательском институте работает 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 — немецкий язык и 20 — французский. Кроме того, известно, что 23 человека владеют одновременно английским и немецким языками, 12 человек — английским и французским, 11 — немецким и французским, наконец, 5 человек — всеми тремя языками. Сколько человек в институте не знают ни одного из этих трех языков?

**25.** Среди натуральных чисел от 1 до 1000 сколько таких, которые не делятся ни на одно из чисел 2, 3, 5?

**26.** Фигура состоит из пяти выпуклых многоугольников, причем все они имеют непустое пересечение. Найдите эйлерову характеристику этой фигуры.

## § 9. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭЙЛЕРОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Докажем существование эйлеровой характеристики на классах элементарных фигур последовательно на прямой, на плоскости и в пространстве.

Пусть $A=\bigcup\limits_{j=1}^{m} B_j$ — элементарная фигура класса $\mathcal{M}(L)$, т. е. объединение отрезков $B_j$ (возможно вырожденных), лежащих на прямой $L$. Докажем, что фигура $A$ равна объединению своих компонент, т. е. таких отрезков $C_i$, из которых никакие два не имеют общих точек. Действительно, возьмем отрезок $B_1$. Возможны два случая: либо $B_1$ уже является компонентой фигуры $A$ (и тогда переобозначим его через $C_1$), либо это не так. Во втором случае среди отрезков $B_2, B_3, \ldots, B_m$ существуют такие (для определенности пусть это будут $B_2, \ldots, B_k$), каждый из которых имеет хотя бы одну общую точку с отрезком $B_1$. Тогда объединение $C_1'=\bigcup\limits_{j=1}^{k} B_j$ является, очевидно, отрезком. Опять возможны два случая: либо $C_1'$ уже является компонентой фигуры $A$ (и тогда переобозначим его: $C_1'=C_1$), либо это не так. Во втором случае среди отрезков $B_{k+1}, \ldots, B_m$ существуют такие (пусть это будет, например, $B_{k+1}, \ldots, B_p$), каждый из которых имеет хотя бы одну общую точку с отрезком $C_1'$. Тогда объединение $C_1''=\bigcup\limits_{j=1}^{p} B_j$ есть отрезок. Снова возможны два случая:

либо $C_1'$ уже является компонентой фигуры $A$, либо нет. Так как всего имеется конечное число отрезков $B_j$, то этот процесс должен кончиться, т. е. мы выделим компоненту $C_1$ фигуры $A$. После этого, выбрасывая из заданной системы отрезков $\{B_1, \ldots, B_m\}$ те, которые содержатся в $C_1$, и применяя указанный процесс к оставшимся отрезкам, мы выделим компоненту $C_2$, затем $C_3$ и, наконец, $C_n$. Получаем равенство

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i,$$

где $C_i$ — компонента фигуры $A$.

Положим теперь

$$\chi(A) = n,$$

т. е. назовем эйлеровой характеристикой фигуры $A$ число ее компонент. Чтобы оправдать это название, надо проверить, что *для этой функции* $\chi$ *справедливы аксиомы* $(\alpha)$—$(\gamma)$. Что касается аксиом $(\alpha)$ и $(\beta)$, то они выполняются тривиальным образом. Остается доказать аддитивность функции $\chi$. Пусть $B = \bigcup_{j=1}^{m} D_j$ — другая фигура класса $\mathcal{M}(L)$ с компонентами $D_j$. Мы докажем аксиому $(\gamma)$ в следующей форме:

$$\chi(A) + \chi(B) = \chi(A \cup B) + \chi(A \cap B) \qquad (9.1)$$

индукцией по числу $n$ компонент фигуры $A$. Предположим сначала, что $n = 1$, т. е. что $A$ состоит из одного отрезка $C_1$, и пусть $C_1$ имеет общие точки в точности с $k$ отрезками — компонентами фигуры $B$, где $0 \leqslant k \leqslant m$ и $m$ — число компонент $B$. Тогда левая часть формулы (9.1) равна $1 + m$. Первое слагаемое правой части равно $1 + m - k$, ибо, когда мы объединяем обе фигуры в одну, то $k$ отрезков фигуры $B$ «склеиваются» в один отрезок (рис. 33); второе же слагаемое правой части равно числу $k$ по предположению. Следовательно, равенство (9.1) справедливо в указанном частном случае. Предположим, что оно доказано для всех фигур $A$, у которых число компонент не больше чем $n-1$ (при фиксированной фигуре $B$), и докажем его для случая, когда $A$ имеет в точности $n$ компонент. Положим

$$A_1 = C_1, \quad A_2 = \bigcup_{i=1}^{2} C_i, \quad \ldots, \quad A_{n-1} = \bigcup_{i=1}^{n-1} C_i, \quad A = A_n = \bigcup_{i=1}^{n} C_i.$$

По предположению индукции справедливо равенство

$$\chi(A_{n-1})+\chi(B)=\chi(A_{n-1}\cup B)+\chi(A_{n-1}\cap B). \qquad (9.2)$$

Пусть отрезок $C_n$ пересекается в точности с $k_n$ отрезками фигуры $B$ и, следовательно, не пересекается с остальными $m-k_n$ отрезками этой фигуры. Перейдем теперь от фигуры $A_{n-1}$ к $A_n$ и посмотрим, как при этом изменятся обе части равенства (9.2). Ясно, что $\chi(A_n)-\chi(A_{n-1})=1$.

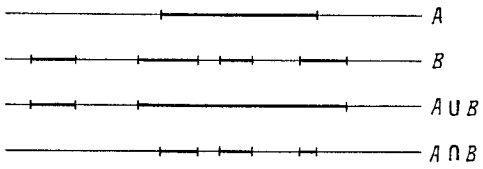



Рис. 33.

Поэтому левая часть равенства (9.2) при таком переходе увеличивается на 1. Далее,

$$\chi(A_n\cup B)-\chi(A_{n-1}\cup B)=1-k_n,$$

ибо новый отрезок $C_n$ «склеивает» в одну компоненту $k_n$ отрезков фигуры $B$; кроме того,

$$\chi(A_n\cap B)-\chi(A_{n-1}\cap B)=k_n.$$

Поэтому правая часть (9.2) увеличивается на $k_n+(1-k_n)=1$, т. е. изменяется так же, как и левая часть. Значит,

$$\chi(A_n)+\chi(B)=\chi(A_n\cup B)+\chi(A_n\cap B),$$

что и требовалось доказать.

Итак, существование эйлеровой характеристики на классе $\mathscr{M}(L)$ доказано.

Перейдем к случаю плоскости. Пусть $\{C_1, \ldots, C_n\}$ — конечное множество выпуклых многоугольников и $A=\bigcup_{j=1}^{n} C_j$ — элементарная фигура класса $\mathscr{M}$. Среди этих многоугольников могут быть вырожденные, т. е. отрезки или точки. Для краткости будем считать, что точка является также отрезком (с совпадающими концами). Рассмотрим множество $T$ отрезков такое, что каждый из них является либо стороной какого-то многоугольника $C_j$ (если последний невырожденный), либо самим этим многоугольником (если он вырожденный). Назовем

*вершинами* фигуры $A$, во-первых, концы отрезков, входящих в множество $T$, во-вторых, точки пересечения двух (или большего числа) таких отрезков. Например, фигура на рис. 34 имеет 21 вершину.

Пусть все вершины фигуры лежат на разной высоте и занумерованы в порядке ее возрастания, т. е. пусть $v_1$ — самая нижняя вершина, $v_2$ лежит выше, чем $v_1$, но

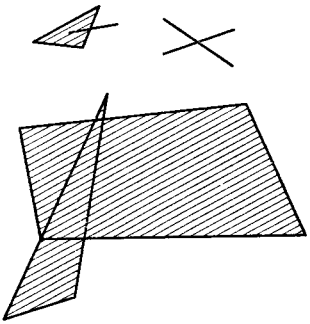


Рис. 34.

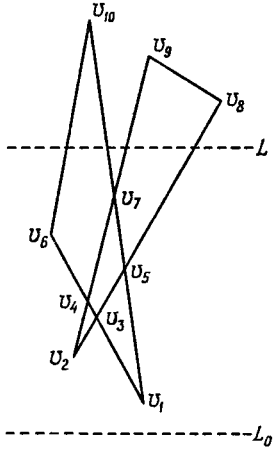



Рис. 35.

ниже, чем $v_3$, и т. д., $v_m$ — самая верхняя вершина (рис. 35).

Проведем горизонтальную прямую $L_0$, расположенную ниже фигуры $A$, и обозначим через $h_i$ $(i=1, \ldots, m)$ расстояние от вершины $v_i$ до этой прямой. Согласно нашему предположению $0<h_1<h_2<\ldots<h_m$. Пусть $L$ — горизонтальная прямая, движущаяся вверх по плоскости из начального положения $L_0$. Пересечение $C_i \cap L$ есть отрезок (возможно, вырожденный или пустой). Согласно распределительному закону имеем

$$A \cap L = \bigcup_{j=1}^{n} (C_j \cap L),$$

и, значит, это пересечение является конечным объединением отрезков, т. е. фигурой класса $\mathcal{M}(L)$. Поэтому существует эйлерова характеристика $\chi(A \cap L)$ пересечения фигуры $A$ с движущейся прямой. Пусть $\varphi(h)=\chi(A \cap L)$ обозначает эту характеристику при таком положении прямой $L$, когда она находится на расстоянии $h$ от своего начального положения $L_0$. Обозначим еще через $L_i$ фиксированное

положение прямой $L$ в тот момент, когда она проходит через вершину $v_i$ $(i=1, \ldots, m)$, а через $L_{i-0}$ — такое ее положение, когда она находится ниже прямой $L_i$, но выше, чем $L_{i-1}$. Легко видеть (рис. 35), что когда прямая $L$ перемещается, оставаясь между двумя соседними по высоте вершинами (а также оставаясь ниже вершины $v_1$ или выше $v_m$), то число $\varphi(h)$ не меняется. Оно может измениться только при «подходе» прямой $L$ снизу к какой-либо вершине, либо при ее «сходе» с этой вершины вверх. Положим

$$\varphi(h_i)=\chi(A\cap L_i), \quad \varphi(h_i-0)=\chi(A\cap L_{i-0}) \qquad (9.3)$$

и определим эйлерову характеристику фигуры $A\in\mathcal{M}$ равенством

$$\chi(A)=\sum_{i=1}^{m}[\varphi(h_i)-\varphi(h_i-0)]. \qquad (9.4)$$

Таким образом, разность $\varphi(h_i)-\varphi(h_i-0)$ есть изменение числа $\chi(A\cap L)$ при «подходе» прямой $L$ снизу к вершине $v_i$ (но не при «сходе» с нее вверх и не при «переходе» через нее!), а эйлерова характеристика $\chi(A)$ есть сумма таких изменений, взятая по всем вершинам.

Заметим, что не все разности, входящие в сумму (9.4), обязательно отличны от нуля. Например, для фигуры $A$ (рис. 35) имеем

$$\varphi(h_1)-\varphi(h_1-0)=\varphi(h_2)-\varphi(h_2-0)=1,$$

$$\varphi(h_3)-\varphi(h_3-0)=-1,$$

а для всех остальных вершин разности равны нулю. Поэтому определение дает $\chi(A)=1$.

Докажем, что функция $\chi$ фигуры $A$, определенная равенством (9.4), удовлетворяет аксиомам $(\alpha)$—$(\gamma)$, и, следовательно, что ее действительно можно назвать эйлеровой характеристикой.

Ясно, что $\chi(\varnothing)=0$. Пусть $A$ — выпуклый многоугольник. Тогда

$$\varphi(h_1)-\varphi(h_1-0)=1, \quad \text{но} \quad \varphi(h_i)-\varphi(h_i-0)=0$$

для всех вершин $v_i$ с номерами $i>1$ (если такие вершины имеются). Поэтому $\chi(A)=1$. Итак, аксиомы $(\alpha)$ и $(\beta)$ выполняются.

Проверим аддитивность функции $\chi$. Пусть $A$ и $B$ — элементарные фигуры. Требуется доказать справедливость

равенства

$$\chi(A)+\chi(B)=\chi(A\cup B)+\chi(A\cap B). \qquad (9.5)$$

Пусть $v_1, \ldots, v_r$ — вершины фигуры $A\cup B$, занумерованные в порядке возрастания их высоты (заметим, что достаточно рассматривать только множество вершин объединения $A\cup B$, так как вершины остальных трех фигур входят в него). Пусть обозначения $L_i$ и $L_{i-0}$ $(i=1, \ldots, r)$ имеют тот же смысл, что и раньше. Каждая из прямых $L_i$ и $L_{i-0}$ пересекается с каждой фигурой $A$, $B$, $A\cup B$, $A\cap B$ по конечному объединению отрезков. Введем для краткости обозначения

$$\varphi_i(A)=\chi(A\cap L_i), \quad \varphi_{i-0}(A)=\chi(A\cap L_{i-0})$$

и аналогично для трех остальных фигур. Тогда, ввиду аддитивности эйлеровой характеристики на классе $\mathcal{M}(L)$, получаем равенства

$$\varphi_i(A)+\varphi_i(B)=\varphi_i(A\cup B)+\varphi_i(A\cap B), \qquad (9.6)$$

$$\varphi_{i-0}(A)+\varphi_{i-0}(B)=\varphi_{i-0}(A\cup B)+\varphi_{i-0}(A\cap B) \qquad (9.7)$$

для всех $i=1, \ldots, r$. Вычтем почленно равенство (9.7) из равенства (9.6) и просуммируем полученные равенства по всем $i=1, \ldots, r$. Тогда получаем

$$\sum_{i=1}^{r}[\varphi_i(A)-\varphi_{i-0}(A)]+\sum_{i=1}^{r}[\varphi_i(B)-\varphi_{i-0}(B)]=$$

$$=\sum_{i=1}^{r}[\varphi_i(A\cup B)-\varphi_{i-0}(A\cup B)]+\sum_{i=1}^{r}[\varphi_i(A\cap B)-\varphi_{i-0}(A\cap B)],$$

а это, с учетом (9.3) и (9.4), означает, что равенство (9.5) справедливо.

Итак, мы доказали существование эйлеровой характеристики на классе $\mathcal{M}$ элементарных фигур на плоскости.

Соответствующее доказательство для класса $\mathcal{M}(R)$ элементарных фигур в пространстве проводится аналогично. При этом используется метод движущейся плоскости и существование эйлеровой характеристики уже на классе $\mathcal{M}$.

## § 10. РАВНОСИЛЬНОСТЬ ДВУХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ ЭЙЛЕРОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Вводная часть этого параграфа содержит некоторые сведения о биномиальных коэффициентах, нужные в дальнейшем.

Пусть заданы натуральное число $n$ и некоторое $n$-элементное множество $A=\{a_1, \ldots, a_n\}$. Любая $m$-элементная часть этого множества называется *$m$-сочетанием* (или *сочетанием по $m$*) из заданных $n$ элементов. Число различных $m$-сочетаний из $n$ элементов обозначается символами $\binom{n}{m}$ или $C_n^m$ (мы предпочитаем пользоваться первым из них). Например, 4-элементное множество $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ имеет шесть 2-элементных частей: $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_1, a_4\}$, $\{a_2, a_3\}$, $\{a_2, a_4\}$, $\{a_3, a_4\}$, и поэтому $\binom{4}{2}=C_4^2=6$. Выражение $\binom{n}{m}$ имеет смысл не только при $m\leqslant n$, но и при $m>n$, и равно в этом случае нулю, ибо $n$-элементное множество совсем не имеет $m$-элементных частей, если $m>n$. Особо отметим равенство $\binom{n}{0}=1$, означающее, что любое $n$-элементное множество имеет одну 0-элементную часть, а именно, пустое множество.

Числа $\binom{n}{m}$ называются еще *биномиальными коэффициентами*, так как они входят в известную формулу

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ \ldots\ +\binom{n}{n}x^n, \quad (10.1)$$

выражающую $n$-ю степень бинома $1+x$ в виде многочлена по возрастающим степеням буквы $x$. Формула (10.1) нам «почти» не потребуется.

Отметим следующую, тоже известную формулу для вычисления биномиальных коэффициентов:

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n(n-1)\ldots[n-(m-1)]}{1\cdot 2\ldots m}.$$

Докажем равенство

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-1}{m}. \quad (10.2)$$

Для этого возьмем какое-нибудь $n$-элементное множество $A=\{a_1, \ldots, a_n\}$, и все его $m$-элементные части разобьем на два класса. Отнесем к первому классу те части, которые содержат элемент $a_n$, ко второму — те, которые его не содержат. Число частей, входящих в первый класс, равно $\binom{n-1}{m-1}$; действительно, если выбросить из всех этих частей элемент $a_n$, то получатся *все* $(m-1)$-

элементные части $(n-1)$-элементного множества $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$. С другой стороны, части второго класса являются $m$-элементными частями того же множества $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$; поэтому их число равно $\binom{n-1}{m}$. Так как указанные два класса не имеют общих элементов (иными словами, ни одна $m$-элементная часть множества $A$ не входит сразу в оба класса), то равенство (10.2) доказано.

В дальнейшем важную роль будет играть формула

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ \ldots\ +(-1)^m\binom{n}{m}=(-1)^m\binom{n-1}{m}, \quad (10.3)$$

справедливая для всех целых неотрицательных чисел $m$ и $n$, и ее частный случай

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0, \quad (10.4)$$

когда $m=n$. Докажем формулу (10.3) индукцией по числу $m$. Если $m=0$ или $m=1$, то она очевидна. Предположим, что она справедлива при $m=j$, и докажем ее для $m=j+1$. Итак, пусть известно, что

$$\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\binom{n}{i}=(-1)^j\binom{n-1}{j}.$$

Тогда, применяя равенство (10.2), получаем

$$\sum_{i=0}^{j+1}(-1)^i\binom{n}{i}=(-1)^j\binom{n-1}{j}+(-1)^{j+1}\binom{n}{j+1}=$$

$$=(-1)^j\left|\binom{n-1}{j}-\binom{n}{j+1}\right|=(-1)^j\left|-\binom{n-1}{j+1}\right|=$$

$$=(-1)^{j+1}\binom{n-1}{j+1}.$$

Таким образом, мы доказали (10.3). Отметим, что формула (10.4) немедленно получается из равенства (10.1), если положить в нем $x=-1$.

Иногда удобнее использовать другие формы равенств (10.3) и (10.4), а именно

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+\binom{n}{3}-\ldots+(-1)^{m+1}\binom{n}{m}=1+$$

$$+(-1)^{m+1}\binom{n-1}{m} \quad (10.5)$$

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+\binom{n}{3}-\ \dots\ +(-1)^{n+1}\binom{n}{n}=1. \qquad (10.6)$$

Переходим к доказательству равносильности двух определений эйлеровой характеристики, не вычисляя ее. Мы сделаем это для следующих трех классов фигур: графов, границ выпуклых многогранников и простых многоугольников на плоскости, разбитых на выпуклые грани. В этих доказательствах существенно, что ребро графа содержит обе вершины, которые оно соединяет, а грань многогранника (или простого многоугольника) содержит свою границу. Можно было бы доказать, что два определения эйлеровой характеристики (конструктивное и аксиоматическое) равносильны для любой фигуры, допускающей разбиение на клетки.

Пусть задан граф $G$. Можно считать, что он не имеет изолированных вершин, и поэтому является объединением конечного числа ребер, т. е. отрезков. Граф $G$ расположен, вообще говоря, в пространстве, а не на плоскости. Согласно формуле (8.10) его эйлерова характеристика равна

$$\chi(G)=q_1-q_2+\ \dots\ +(-1)^{n-1}q_n. \qquad (10.7)$$

Здесь $q_1$ обозначает общее число ребер графа $G$, $q_2$ — число пар его ребер, имеющих непустое пересечение, или, что то же, имеющих общую вершину, $q_3$ — число троек ребер с непустым пересечением; наконец, $q_n$ — число таких $n$-элементных частей множества ребер, что все ребра, входящие в каждую из этих частей, имеют непустое пересечение, т. е. общую вершину. Нам надо доказать формулу

$$q_1-q_2+\dots+(-1)^{n-1}q_n=\mathrm{B}-\mathrm{P}. \qquad (10.8)$$

Предварительно укажем соотношение между числом ребер P и числами вершин разных степеней. Пусть $\mathrm{B}_1$ обозначает число вершин графа, имеющих степень 1, $\mathrm{B}_2$ — число его вершин степени 2 и т. д., наконец, $\mathrm{B}_n$ — число вершин максимальной степени $n$, тогда

$$\mathrm{B}_1+2\mathrm{B}_2+3\mathrm{B}_3+\ \dots\ +n\mathrm{B}_n=2\mathrm{P}. \qquad (10.9)$$

(Обратите внимание на то, что в равенствах (10.8) и (10.9) буквой $n$ обозначено фактически одно и то же число.) Соотношение (10.9) очень просто получается суммированием ребер графа по всем его вершинам с учетом того, что при таком суммировании каждое ребро учитывается дважды.

Для доказательства (10.8) заметим прежде всего, что $q_1 = P$. Найдем теперь выражение для числа $q_2$. Пара ребер с непустым пересечением «возникает», во-первых, благодаря наличию вершин степени 2, причем каждой такой вершине соответствует одна такая пара. Далее, так как в каждой вершине степени 3 сходятся 3 ребра, то ей соответствует столько пар ребер с непустым пересечением, сколько имеется 2-элементных частей 3-элементного множества, т. е. $\binom{3}{2}$. Аналогично, каждой вершине степени 4 соответствует $\binom{4}{2}$ пар ребер с непустым пересечением и т. д. Наконец, каждой вершине максимальной степени $n$ соответствует $\binom{n}{2}$ таких пар. Так как ребра пересекаются только в вершинах, то из всего сказанного заключаем, что

$$q_2 = \binom{2}{2} B_2 + \binom{3}{2} B_3 + \binom{4}{2} B_4 + \ldots + \binom{n}{2} B_n.$$

Из аналогичных соображений (с учетом того, что тройки ребер с непустым пересечением не «возникают» из вершин степени 2) получаем равенство

$$q_3 = \binom{3}{3} B_3 + \binom{4}{3} B_4 + \binom{5}{3} B_5 + \ldots + \binom{n}{3} B_n.$$

Аналогично,

$$q_4 = \binom{4}{4} B_4 + \binom{5}{4} B_5 + \ldots + \binom{n}{4} B_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$q_{n-1} = \binom{n-1}{n-1} B_{n-1} + \binom{n}{n-1} B_n,$$

$$q_n = \binom{n}{n} B_n.$$

Подставляя найденные значения $q_i$ в формулу (10.7), получаем

$$\chi(G) = P -$$

$$- \left[ \binom{2}{2} B_2 + \binom{3}{2} B_3 + \binom{4}{2} B_4 + \ldots + \binom{n-1}{2} B_{n-1} + \binom{n}{2} B_n \right] +$$

$$+ \left[ \binom{3}{3} B_3 + \binom{4}{3} B_4 + \ldots + \binom{n-1}{3} B_{n-1} + \binom{n}{3} B_n \right] -$$

$$-\left[\binom{4}{4}B_4+\ \dots\ +\binom{n-1}{4}\ B_{n-1}+\binom{n}{4}B_n\right]+\dots$$

$$\dots\ +(-1)^{n-2}\ \binom{n-1}{n-1}B_{n-1}+\binom{n}{n-1}B_n\Big]+$$

$$+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}B_n,$$

или, после перегруппировки членов,

$$\chi\ G\ =P-\ \binom{2}{2}B_2+\left[-\binom{3}{2}+\binom{3}{3}\right]B_3+\dots\ +\left[-\ \binom{i}{2}+\right.$$

$$\left.+\binom{i}{3}-\ \dots\ +(-1)^i\binom{i}{i-1}+(-1)^{i+1}\binom{i}{i}\right]B_i+\ \dots$$

$$\dots+\left[-\binom{n}{2}+\binom{n}{3}-\dots+(-1)^n\binom{n}{n-1}+(-1)^{n+1}\ \ \binom{n}{n}\right]B_n$$

Применяя равенство (10.6), получаем

$$\chi\ G)=P-B_2-2B_3-\ \dots\ -(i-1)B_i-\ \dots\ -(n-1\ B_n.$$

Дальше преобразуем правую часть следующим образом:

$$\chi(G)=(-P+2P)+(B_1-B_1)+(B_2-2B_2)+$$

$$+(B_3-3B_3)+\dots+(B_n-nB_n)=-P+(B_1+B_2+\dots+B_n)+$$

$$+(2P-B_1-2B_2-3B_3-\dots-nB_n).$$

Ввиду формулы (10.9) и очевидного равенства

$$B=B_1+B_2+B_3+\dots+B_n$$

имеем $\chi(G)=B-P$, что и требовалось доказать.

Пусть $X$ — выпуклый многогранник. Согласно второму определению эйлерова характеристика его границы $\partial X$ равна

$$\chi(\partial X)=q_1-q_2+q_3-\dots+(-1)^{n-1}q_n, \qquad (10.10)$$

где $q_1$ — общее число граней многогранника $X$, $q_2$ — число пар граней, имеющих непустое пересечение, $q_3$ — число троек граней, имеющих непустое пересечение, ... ..., $q_n$ — число таких $n$-элементных частей множества граней, что все грани, входящие в одну часть, имеют непустое пересечение. Нам надо доказать равенство

$$q_1-q_2+q_3-\ \dots\ +(-1)^{n-1}q_n=B-P+\Gamma. \qquad (10.11)$$

Прежде всего заметим, что всегда $q_1=\Gamma$. Рассмотрим сначала простейший случай, когда степени всех вершин многогранника равны 3 (как у тетраэдра, куба или доде-

каэдра). Тогда $q_2 = \Gamma$, ибо в этом случае каждое непустое пересечение двух граней является обязательно ребром многогранника, и обратно, все его ребра имеют такой вид. Кроме того, каждая вершина многогранника равна непустому пересечению именно трех граней, и обратно, каждое такое пересечение определяет вершину. Отсюда $q_3 = \mathrm{B}$, $q_4 = q_5 = \ldots = 0$, и поэтому

$$q_1 - q_2 + q_3 = \Gamma - \Gamma + \mathrm{B}.$$

Этим доказан частный случай формулы (10.11).

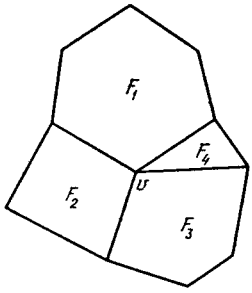


Рис. 36.

В общем случае каждое непустое пересечение двух граней многогранника является либо его ребром, либо вершиной. Одиако это совсем не значит, что $q_2 = \Gamma + \mathrm{B}$: ведь одна и та же вершина может встретиться среди таких пересечений не один раз, а несколько в зависимости от ее степени. Например, если $v$ — вершина степени 4, то она содержится в четырех различных гранях $F_1$, $F_2$, $F_3$ и $F_4$ многогранника $X$ (рис. 36, где изображены не сами эти грани, а их проекции на плоскость, что, конечно, не меняет дела). Эти грани образуют $\binom{4}{2} = 6$ непустых попарных пересечений. Из них только четыре пересечения, а именно, $F_1 \cap F_2$, $F_2 \cap F_3$, $F_3 \cap F_4$ и $F_4 \cap F_1$ равны ребрам; остальные же два, т. е. $F_1 \cap F_3$ и $F_2 \cap F_4$, совпадают с самой вершиной $v$. Вообще, если степень вершины $v$ равна $i$ ($i \geqslant 3$), то $i$ граней, имеющих точку $v$ своей общей вершиной, дают $\binom{i}{2}$ непустых попарных пересечений; из них $\binom{i}{1}$ пересечений соответствуют ребрам, выходящим из этой вершины, а остальные, число которых равно $\binom{i}{2} - \binom{i}{1}$, совпадают с самой вершиной $v$. Итак, имеем равенство

$$q_2 = \Gamma + \left[\binom{3}{2} - \binom{3}{1}\right]\mathrm{B}_3 + \left[\binom{4}{2} - \binom{4}{1}\right]\mathrm{B}_4 + \ldots$$

$$\ldots + \left[\binom{n}{2} - \binom{n}{1}\right]\mathrm{B}_n, \qquad (10.12)$$

где $\mathrm{B}_3$ обозначает число вершин многогранника, имею-

щих степень 3, ..., $B_n$ — число его вершин максимальной степени $n$ (здесь, как и раньше, в формулах (10.10) и (10.12) буквой $n$ обозначено одно и то же число). Из (10.12) и очевидного равенства

$$B = B_3 + B_4 + \ldots + B_n = \binom{3}{0} B_3 + \binom{4}{0} B_4 + \ldots + \binom{n}{0} B_n$$

получаем

$$q_1 - q_2 = \Gamma - P - \left\{\left[\binom{3}{2} - \binom{3}{1}\right] B_3 + \ldots + \left[\binom{n}{2} - \binom{n}{1}\right] B_n\right\} +$$

$$+ B - \left[\binom{3}{0} B_3 + \ldots + \binom{n}{0} B_n\right] = \Gamma - P + B -$$

$$- \left\{\left[\binom{3}{2} - \binom{3}{1} + \binom{3}{0}\right] B_3 + \ldots + \left[\binom{n}{2} - \binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right] B_n\right\}$$

Отсюда ясно, что для окончания доказательства формулы (10.11) достаточно проверить справедливость равенства

$$\left[\binom{3}{2} - \binom{3}{1} + \binom{3}{0}\right] B_3 + \ldots + \left[\binom{n}{2} - \binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right] B_n -$$

$$- q_3 + q_4 - \ldots + (-1)^n q_n = 0. \qquad (10.13$$

Займемся такой проверкой. Для этого заметим, что каждое непустое пересечение трех, четырех или любого большего числа $i$ граней обязательно является вершиной многогранника. При этом непустое пересечение $i$ граней «возникает» только из вершин степени $\geqslant i$; если степень вершины равна $m$, то имеется в точности $\binom{m}{i}$ равных ей самой таких пересечений. Поэтому

$$q_3 = \binom{3}{3} B_3 + \binom{4}{3} B_4 + \ldots + \binom{n-1}{3} B_{n-1} + \binom{n}{3} B_n,$$

$$q_4 = \binom{4}{4} B_4 + \ldots + \binom{n-1}{4} B_{n-1} + \binom{n}{4} B_n,$$

. . . . . .

$$q_{n-1} = \binom{n-1}{n-1} B_{n-1} + \binom{n}{n-1} B_n,$$

$$q_n = \binom{n}{n} B_n.$$

Подставляя эти выражения в (10.13) и меняя порядок

слагаемых, видим, что левая часть (10.13) равна

$$\left[\binom{3}{0}-\binom{3}{1}+\binom{3}{2}-\binom{3}{3}\right]B_3+$$

$$+\left[\binom{4}{0}-\binom{4}{1}+\binom{4}{2}-\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\right]B_4+\ \ldots$$

$$\ldots+\left[\binom{n-1}{0}-\binom{n-1}{1}+\ \ldots\ +(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\right]B_{n-1}+$$

$$+\left[\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\ \ldots\ +(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}+(-1)^n\binom{n}{n}\right]B_n.$$

Вследствие (10.4) каждая квадратная скобка равна нулю. Равенство (10.13) доказано, а значит и (10.11).

Пусть $M$ — простой многоугольник на плоскости, разбитый на выпуклые грани. Докажем равенство

$$q_1-q_2+q_3-\ \ldots\ +(-1)^{n-1}q_n=B-P+\Gamma, \qquad (10.14)$$

где обозначения имеют тот же смысл, что и в формуле (10.11), но относительно произвольного разбиения $M$. Доказательство проходит по той же схеме. Отметим, однако, некоторые отличия.

Назовем *степенью* вершины разбиения число выходящих из нее ребер. В отличие от случая многогранника, теперь вершины (как и ребра) делятся на внутренние и граничные. Пусть $B^i$ обозначает общее число внутренних вершин, $B_3^i$ — число внутренних вершин степени 3, ... ..., $B_n^i$ — число внутренних вершин максимальной степени $n$, тогда

$$B^i=B_3^i+B_4^i+\ \ldots\ +B_n^i=\binom{3}{0}B_3^i+\binom{4}{0}B_4^i+\ \ldots\ +\binom{n}{0}B_n^i. \qquad (10.15)$$

Далее, пусть $B^e$ обозначает число всех граничных вершин, $P^i$ и $P^e$ — числа внутренних и граничных ребер соответственно. Очевидно, что

$$B=B^i+B^e,\quad P=P^i+P^e,\quad B^e=P^e. \qquad (10.16)$$

Обозначим еще через $B_3^e, \ldots, B_n^e$ число граничных вершин, имеющих степени $3, \ldots, n$ соответственно.

Как и в случае многогранника, имеем $q_1=\Gamma$. Однако уже в вычислении $q_2$ появляются отличия: во-первых, только внутренние ребра являются пересечениями граней, а граничные — нет; во-вторых, в граничной вершине степени $j$ ($j\geqslant 3$) сходится теперь $j-1$ граней, а не $j$. Следовательно, такая вершина дает $\binom{j-1}{2}$ непустых попарных пересечений граней; из них $j-2$ пересечения соответствуют внутренним ребрам, выходящим из этой вершины, а остальные, число которых равно $\binom{j-1}{2}-(j-2)$, равны самой вершине. С другой стороны, как и раньше, каждая внутренняя вершина $v$ степени $j$ дает $\binom{j}{1}$ непустых попарных пересечений граней, каждое из которых равно внутреннему ребру, и $\binom{j}{2}-\binom{j}{1}$ непустых попарных пересечений, равных

самой вершине $v$. Поэтому

$$q_1 - q_2 = \Gamma - P^i -$$

$$-\left\{\left[\binom{3}{2}-\binom{3}{1}\right]B_3^i+\left[\binom{4}{2}-\binom{4}{1}\right]B_4^i+\ \dots\ +\left[\binom{n}{2}-\binom{n}{1}\right]B_n^i+\right.$$

$$\left.+\left[\binom{2}{2}-1\right]B_3^e+\left[\binom{3}{2}-2\right]B_4^e+\dots+\left[\binom{n-1}{2}-(n-2)\right]B_n^e\right\}. \quad (10.17)$$

Из (10.16) получаем

$$\Gamma - P^i = (\Gamma - P + B) + P^e - B^i - B^e = (\Gamma - P + B) - B^i. \quad (10.18)$$

Ввиду (10.17) и (10.18) для окончания доказательства формулы (10.14) достаточно проверить, что

$$B^i+\left[\binom{3}{2}-\binom{3}{1}\right]B_3^i+\dots+\left[\binom{n}{2}-\binom{n}{1}\right]B_n^i+$$

$$+\left[\binom{2}{2}-1\right]B_3^e+\ \dots\ +\left[\binom{n-1}{2}-(n-2)\right]B_n^e-$$

$$-q_3+q_4-\ \dots\ +(-1)^n q_n=0. \quad (10.19)$$

Для этой проверки найдем числа $q_3$, $q_4$ и т. д. Так как непустые тройные пересечения граней «возникают» из внутренних вершин степени $\geqslant 3$ и граничных вершин степени $\geqslant 4$, то

$$q_3=\binom{3}{3}B_3^i+\binom{4}{3}B_4^i+\ \dots\ +\binom{n-1}{3}B_{n-1}^i+\binom{n}{3}B_n^i+$$

$$+\binom{3}{3}B_4^e+\ \dots\ +\binom{n-2}{3}B_{n-1}^e+\binom{n-1}{3}B_n^e.$$

Аналогично,

$$q_4=\binom{4}{4}B_4^i+\binom{5}{4}B_5^i+\dots+\binom{n-1}{4}B_{n-1}^i+\binom{n}{4}B_n^i+$$

$$+\binom{4}{4}B_5^e+\dots+\binom{n-2}{4}B_{n-1}^e+\binom{n-1}{4}B_n^e,$$

. . . . . .

$$q_{n-1}=\binom{n-1}{n-1}B_{n-1}^i+\binom{n}{n-1}B_n^i+$$

$$+\binom{n-1}{n-1}B_n^e,$$

$$q_n=\binom{n}{n}B_n^i.$$

Учитывая (10.15) и подставляя числа $q_3$, $q_4$, ..., $q_n$ в левую часть равенства (10.19), после простых преобразований найдем, что эта левая часть имеет следующий вид:

$$\left[\binom{3}{0}-\binom{3}{1}+\binom{3}{2}-\binom{3}{3}\right]B_3^i+\left[\binom{4}{0}-\binom{4}{1}+\binom{4}{2}-\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\right]B_4^i+\dots$$

$$\dots+\left[\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\ \dots\ +(-1)^n\binom{n}{n}\right]B_n^i+$$

$$+\left[-1+\binom{2}{2}\right]B_3^e+\left[-2+\binom{3}{2}-\binom{3}{3}\right]B_4^e+\cdots$$
$$\cdots+\left[-(n-2)+\binom{n-1}{2}-\binom{n-1}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\right]B_n^e.$$

Все коэффициенты при членах $B_3^i, B_4^i, \ldots, B_n^i$ равны нулю ввиду равенства (10.4). Что касается коэффициентов при $B_3^e, B_4^e, \ldots, B_n^e$, то каждый из них тоже равен нулю. В этом проще всего убедиться с помощью формулы (10.6), если переписать ее так:

$$\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=\binom{n}{1}-1=n-1.$$

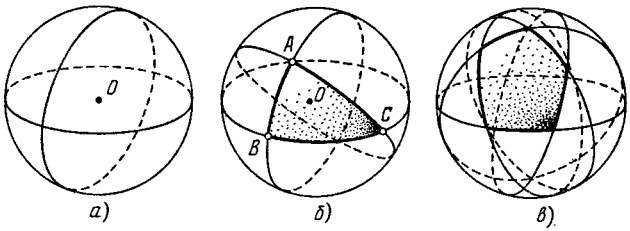
Поэтому доказано равенство (10.19) и, следовательно, также формула (10.14).

**Задача**

**27.** Фигура является объединением $n$ выпуклых многоугольников $A_1, \ldots, A_n$, причем $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing$. Найдите эйлерову характеристику этой фигуры.

## § 11. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФИГУРЫ НА СФЕРЕ И ИХ ЭЙЛЕРОВЫ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Пусть $S$ — сфера. *Большой окружностью* на $S$ называется линия пересечения сферы и плоскости, проходящей через ее центр $O$ (рис. 37, *а*). Большая окружность делит сферу на две *полусферы*; мы будем предполагать,




*а*) *б*) *в*)

Рис. 37.

что сама она содержится в каждой из них. *Выпуклым многоугольником* на $S$ называется пересечение конечного числа полусфер (рис. 37, *б*, *в*). Таким образом, выпуклые многоугольники на сфере определяются так же, как на плоскости, только роль прямых играют здесь большие окружности, а роль полуплоскостей — полусферы.

В отличие от плоскости, где треугольник является многоугольником с наименьшим числом сторон, на сфере имеются выпуклые многоугольники с числом сторон, меньшим трех,— двуугольники. *Двуугольник* есть пересечение двух полусфер, у которых граничные большие окружности не совпадают (рис. 38). Большая окружность — тоже выпуклый многоугольник, так как она является пересечением двух (определяемых ее) полусфер. Наконец, в число выпуклых многоугольников на $S$ входят пары *точек-антиподов,* т. е. пары точек, являющихся концами одного диаметра сферы. Действительно, пара антиподов есть пересечение двух больших окружностей и, следовательно,— пересечение четырех полусфер.

Выпуклый многоугольник на сфере называется *строго выпуклым*, если он не содержит ни одной пары антиподов; таковы, например, треугольник и пятиугольник на

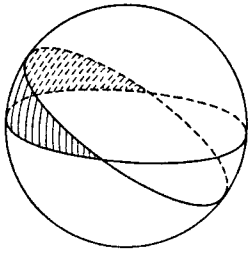


Рис. 38.

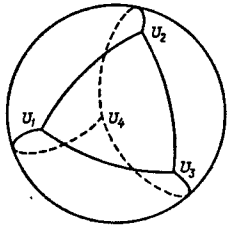



Рис. 39.

рис. 37. Наоборот, двуугольник — не строго выпуклый, так как содержит (единственную) пару антиподов — свои вершины. Выпуклый многоугольник называется *вырожденным*, если он лежит в большой окружности (в частности, совпадает с ней).

*Элементарной фигурой* на сфере называется объединение конечного числа *строго выпуклых* многоугольников, возможно, вырожденных. Этот класс фигур обозначим через $\mathcal{M}(S)$. Как легко видеть, в класс $\mathcal{M}(S)$ входят *все* выпуклые многоугольники (например, полусфера, двуугольник, пара антиподов), а не только строго выпуклые. Важно отметить, что в этот класс входит и сама сфера $S$. Действительно, пусть $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ — вершины такого тетраэдра, вписанного в $S$, что центр сферы лежит внутри него (рис. 39). Рассмотрим на сфере четыре треугольника: $A_1$ — с вершинами $v_2$, $v_3$, $v_4$, $A_2$ — с вершинами $v_1$, $v_3$, $v_4$, $A_3$ — с вершинами $v_1$, $v_2$, $v_4$ и $A_4$ — с вершинами $v_1$,

$v_2$, $v_3$. Ясно, что все эти треугольники строго выпуклы, и, кроме того,

$$S = \bigcup_{i=1}^{4} A_i. \tag{11.1}$$

Пусть $C$ — большая окружность сферы. *Элементарной фигурой* на окружности $C$ называется объединение конечного числа дуг, длины которых меньше длины полуокружности. Такие дуги будем называть *короткими*. В частности, сама окружность представима в виде объединения трех коротких дуг, из которых каждые две имеют по общему концу:

$$C = \bigcup_{i=1}^{3} B_i. \tag{11.2}$$

Пусть $\mathcal{M}(C)$ обозначает класс всех элементарных фигур на окружности.

Эйлерова характеристика на классах $\mathcal{M}(S)$ и $\mathcal{M}(C)$ определяется с помощью аксиом $(\alpha)$, $(\beta)$ и $(\gamma)$ из § 8. Однако, в отличие от случая плоскости, аксиома $(\beta)$ формулируется теперь так:

$(\beta)$ для каждого (в том числе вырожденного) непустого *строго выпуклого* многоугольника $A$ на сфере $S$ имеем $\chi(A)=1$.

В частности, для каждой непустой короткой дуги $B$ большой окружности $C$ имеем $\chi(B)=1$.

Причина того, что равенство $\chi(A)=1$ теперь должно выполняться только для строго выпуклых (а не всех выпуклых) многоугольников, понятна: ведь в число выпуклых многоугольников входит, например, пара антиподов, а ее эйлеровой характеристикой естественно считать число 2, но не 1.

Доказательство существования эйлеровой характеристики на классе $\mathcal{M}(C)$ проводится аналогично тому, как это было сделано для класса элементарных фигур на прямой, но с одним отличием. Именно, легко проверить, что всякая элементарная фигура $M$ на окружности $C$ либо равна объединению конечного числа дуг (не обязательно коротких) этой окружности, попарно не имеющих общих точек и называемых, как обычно, компонентами фигуры $M$, либо совпадает с окружностью $C$. В первом случае $\chi(M)$ полагаем равной числу компонент фигуры $M$. Во втором случае мы должны считать, что $\chi(M)=\chi(C)=0$, так как это равенство необходимо следует из аксиом

эйлеровой характеристики, ее единственности и представления (11.2). Действительно,

$$\chi(C)=\sum^{(1)}\chi(B_i)-\sum^{(2)}\chi(B_{i_1}\cap B_{i_2})+$$
$$+\chi(B_1\cap B_2\cap B_3)=3-3+0=0.$$

Так же, как в § 9, проверяется, что при этом выполнены аксиомы (α)—(γ).

Доказательство существования эйлеровой характеристики на классе $\mathcal{M}(S)$ проводится аналогично тому, как это было сделано для класса элементарных фигур на плоскости, а именно, применением метода «вращающейся» большой окружности; однако здесь тоже имеются некоторые отличия. Пусть

$$M=\bigcup_{j=1}^{n}A_j$$

— элементарная фигура класса $\mathcal{M}(S)$, т. е. объединение строго выпуклых многоугольников $A_j$ на сфере. Среди них могут быть вырожденные, т. е. короткие дуги или точки. Следует различать два случая: $M=S$ и $M\neq S$. В первом случае мы должны считать $\chi(M)=\chi(S)=2$, что необходимо следует из аксиом эйлеровой характеристики, ее единственности и представления (11.1):

$$\chi(S)=\sum^{(1)}\chi(A_j)-\sum^{(2)}\chi(A_{j_1}\cap A_{j_2})+\sum^{(3)}\chi(A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap A_{j_3})-$$
$$-\chi(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)=4-6+4-0=2.$$

Во втором случае возьмем пару точек-антиподов $N_1$ и $N_2$, отличных от всех вершин фигуры $M$. Назовем точки $N_1$ и $N_2$ «полюсами» (скажем, «Северным» и Южным»). Выберем большую окружность $C_0$ так, чтобы она проходила через полюсы, но не проходила через вершины фигуры $M$ (которых всего конечное число). Пусть, например, $C_0$ состоит из «Гринвичского меридиана» и «линии перемены дат». Пусть $C$ — большая окружность, проходящая через полюсы и «вращающаяся», скажем, с «запада» на «восток» от начального положения $C_0$ до конечного положения тоже $C_0$ (но так, что при этом «Гринвичский меридиан» и «линия перемены дат» поменяются местами).

Положим

$$\chi(M)=\chi(M\cap N_1)+\chi(M\cap N_2)+\sum_{i=1}^{m}[\chi(M\cap C_i)-\chi(M\cap C_{i-0})]. \tag{11.3}$$

Здесь $C_i$ обозначает положение вращающейся окружности

в тот момент, когда она проходит через некоторую вершину $v_i$ фигуры $M$, а $C_{i-0}$ расположена чуть «западнее», чем $C_i$. Как и в § 9, можно доказать, что функция $\chi$ фигуры $M$, определенная равенством (11.3), удовлетворяет аксиомам эйлеровой характеристики. При этом не обязательно требовать, чтобы в каждом своем положении окружность $C$ встречала только одну вершину фигуры $M$.

### Задачи

**28.** Футбольный мяч обычно шьется из кусков кожи двух типов: пятиугольных и шестиугольных (которые, кроме формы, различаются еще и цветом). Можно ли сшить мяч из одних только шестиугольных кусков?

**29.** На сфере имеется $n$ ($n \geqslant 3$) больших окружностей, не проходящих через одну пару точек-антиподов. Найдется ли на сфере точка, лежащая в точности на двух из этих окружностей?

## § 12. ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЭЙЛЕРОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В этом параграфе будет использоваться формула

$$\chi(M) = c(M) - c^*(M) + 1 \qquad (12.1)$$

для многоугольников $M$ на плоскости или на сфере. Напомним, что $c(M)$ обозначает число компонент фигуры $M$, а $c^*(M)$ — число компонент ее дополнения относительно плоскости или сферы.

Заметим сначала без доказательства, что всякий многоугольник $B$ можно единственным образом представить в виде объединения

$$B = \bigcup_{i=1}^{m} A_i. \qquad (12.2)$$

таких многоугольников $A_i$, что каждый из них либо простой, либо имеет только простые дыры, причем пересечение каждой пары $A_i \cap A_j$ либо состоит из одной точки, либо пусто.

Например, многоугольник *в*) (рис. 8 на с. 16) составлен из трех треугольников, многоугольник *е*) составлен из двух треугольников и одного многоугольника с двумя простыми дырами, а многоугольник *ж*) — из трех простых многоугольников и одного многоугольника с тремя простыми дырами.

Единственность представления (12.2) обеспечивается, вообще говоря, только указанным выше ограничением

на пересечения пар $A_i \cap A_j$. В самом деле, многоугольник $д$) на рис. 8 можно рассматривать как объединение трех простых, из которых, однако, каждые два имеют по две общие точки; с другой стороны, этот же многоугольник $д$) можно считать своим единственным «слагаемым» в представлении (12.2), но имеющим три простых дыры.

Переходим к доказательству равенства (12.1). Пусть сначала многоугольник $B$ не имеет дыр. Докажем, что тогда $\chi(B)=1$. Действительно, в представлении (12.2)

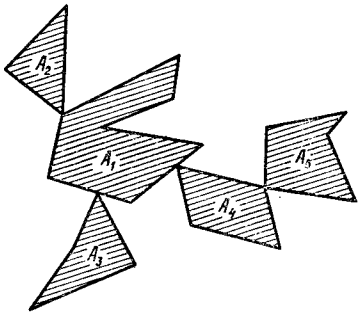



Рис. 40.

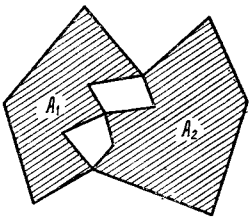



Рис. 41.

«слагаемые» $A_i$ можно расположить в таком порядке, чтобы все фигуры

$$B_1=A_1, \quad B_2=A_1 \cup A_2, \quad B_3=\bigcup_{i=1}^{3} A_i, \ \ldots, \ B=B_m=\bigcup_{i=1}^{m} A_i.$$

были связными (рис. 40). Тогда для всех номеров $i$ пересечение $B_{i-1} \cap A_i$ состоит из одной точки, ибо иначе многоугольник $B_i$ имел бы дыры (рис. 41). Поэтому

$$\chi(B_1)=\chi(A_1)=1,$$

$$\chi(B_2)=\chi(A_1)+\chi(A_2)-\chi(A_1 \cap A_2)=1+1-1=1,$$

. . . . . .

$$\chi(B)=\chi(B_{m-1})+\chi(A_m)-\chi(B_{m-1} \cap A_m)=1+1-1=1.$$

С другой стороны, для многоугольника без дыр имеем $c(B)=c^*(B)=1$, и, значит, (12.1) справедливо.

Пусть теперь многоугольник $M$ имеет $n$ дыр $C_1, \ldots, C_n$, и все они простые. Докажем равенство (12.1) индукцией по числу дыр.

Пусть $M_0$ — многоугольник, полученный из $M$ «заклеиванием» всех дыр. Как мы знаем, для $M_0$ равенство (12.1) верно. Пусть $M_1$ — многоугольник, полученный из $M_0$

«вырезанием» дыры $C_1$, $M_2$ — многоугольник, полученный из $M_1$ вырезанием дыры $C_2$ и т. д., $M_n = M$ — многоугольник, полученный из $M_{n-1}$ вырезанием дыры $C_n$. Ясно, что

$$c(M_1) = c(M_2) = \ldots = c(M_n) = 1,$$

$$c^*(M_1) = 2, \quad c^*(M_2) = 3, \ldots, \quad c^*(M_n) = c^*(M) = n + 1.$$

Предположим, что равенство (12.1) справедливо для многоугольника $M_{n-1}$, т. е. пусть

$$\chi(M_{n-1}) = c(M_{n-1}) - c^*(M_{n-1}) + 1 = 1 - n + 1 = 2 - n.$$

Докажем аналогичное равенство для $M_n = M$. Имеем $M_{n-1} = M_n \cup C_n$, откуда $\chi(M_{n-1}) = \chi(M_n) + \chi(C_n)$. Кроме того, по следствию теоремы 1 $\chi(C_n) = 1$. Поэтому

$$\chi(M_n) = \chi(M_{n-1}) - \chi(C_n) = 2 - n - 1 = 1 - n.$$

С другой стороны,

$$c(M_n) - c^*(M_n) + 1 = 1 - n - 1 + 1 = 1 - n.$$

Итак, равенство (12.1) доказано для многоугольника, имеющего только простые дыры.

В самом общем случае это равенство получается из свойства аддитивности эйлеровой характеристики и представления (12.2). Заметим, что так же оно доказывается и для сферы; при этом следует только учитывать, что, в отличие от случая плоскости, при заклеивании дыр может получиться фигура, совпадающая со всей сферой.

Применение эйлеровой характеристики особенно удобно там, где идет речь о связи между свойствами покрытия фигуры (например, сферы) семейством выпуклых многоугольников и свойствами пересечения этого покрывающего семейства. Говорят, что семейство $\{A_1, \ldots, A_n\}$ выпуклых многоугольников на сфере $S$ *покрывает* ее, если

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Теорема 3. *Пусть $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ — невырожденные строго выпуклые многоугольники на сфере $S$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(а) *эти многоугольники покрывают сферу;*

(б) *пересечение всех четырех многоугольников пусто, а пересечение каждых трех из них непусто.*

Сформулируем еще аналогичное предложение для большой окружности (вместо сферы).

Теорема 4. *Пусть $A_1$, $A_2$, $A_3$ — короткие дуги на большой окружности $C$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(а) *эти дуги покрывают окружность;*

(б) *пересечение всех трех дуг пусто, а пересечение каждых двух из них непусто.*

Мы докажем теорему 3, используя теорему 4 в качестве *леммы*. Так как теоремы 3 и 4 доказываются аналогично, то доказательство теоремы 4 можно предоставить читателю.

Доказательство. Докажем, что из (а) следует (б). Пусть четыре многоугольника покрывают сферу. Тогда ясно, что на сфере не может существовать точки, которая принадлежала бы всем этим многоугольникам: если бы такая точка была, то ее антипод не принадлежал бы ни одному многоугольнику ввиду их строгой выпуклости, а это противоречит условию. Докажем, что каждые три многоугольника из данных четырех имеют общую точку. Для этого возьмем многоугольник $A_4$ и проведем на сфере большую окружность $C$, которая не имеет общих точек с $A_4$. Что такая окружность существует, можно убедиться следующим образом. Многоугольник $A_4$ равен пересечению некоторого числа полусфер. Если взять среди этих полусфер только две, то их пересечение будет двуугольником $D$. Проведем большую окружность $C'$, имеющую только две общие точки с двуугольником $D$ — его вершины $v$ и $v'$. Чтобы получить $A_4$ из $D$, надо от $D$ «отрезать» некоторые куски; в частности, при этом будет отрезана по крайней мере одна из вершин $v$ и $v'$. Но тогда малым поворотом окружности $C'$ можно добиться того, чтобы она не имела общих точек с $A_4$.

Итак, имеется такая большая окружность $C$, что $C \cap A_4 = \varnothing$. В таком случае окружность $C$ покрывается тремя множествами $A_1 \cap C$, $A_2 \cap C$ и $A_3 \cap C$, которые являются короткими дугами. По теореме 4 каждые две из этих трех дуг имеют общую точку; значит, каждая пара из трех многоугольников $A_1$, $A_2$ и $A_3$ тоже имеет общую точку. Так как вместо многоугольника $A_4$ можно было бы взять любой другой, то любые два из четырех многоугольников имеют непустое пересечение. Поэтому $\chi(A_i \cap A_j) = 1$ для всех $i$, $j = 1, 2, 3, 4$. Теперь, используя равенство $S = \bigcup_{i=1}^{4} A_i$ и формулу (8.10), получаем

$$2 = \chi(S) = q_1 - q_2 + q_3 - q_4 = \binom{4}{1} - \binom{4}{2} + q_3 - 0,$$

откуда $q_3=4$. Это означает, что каждая тройка многоугольников, взятая из множества $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, имеет непустое пересечение, так как всего таких троек — ровно 4. Итак, мы доказали, что из (а) следует (б).

Докажем теперь, что из (б) следует (а). Пусть теперь выполнено утверждение (б). Положим $A=\bigcup_{i=1}^{4} A_i$, тогда

$$\chi(A)=q_1-q_2+q_3-q_4=\binom{4}{1}-\binom{4}{2}+\binom{4}{3}-0=2.$$

Фигура $A$ связна, значит, $c(A)=1$. Применяя к этой фигуре формулу (12.1), справедливую также для сферы, получаем $c^*(A)=0$, а это значит, что $A$ покрывает сферу $S$. Теорема 3 доказана.

Следствие. *Наименьшее число строго выпуклых многоугольников, покрывающих сферу, равно* 4.

Доказательство. Действительно, равенство (11.1) показывает, что имеются четыре строго выпуклых треугольника, покрывающих сферу. С другой стороны, если ее покрывают три строго выпуклых многоугольника $A_1$, $A_2$ и $A_3$, то четыре многоугольника $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_3$ тоже покрывают. Тогда по теореме 3 пересечение $\bigcap_{i=1}^{3} A_i$ непусто, что противоречит той же теореме.

Теорема 5. *Пусть $A_1$, $A_2$, $A_3$ — двуугольники на сфере $S$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(а) *эти двуугольники покрывают сферу;*

(б) *пересечение всех трех двуугольников равно паре антиподов, а пересечение каждых двух из них непусто и отлично от пары антиподов.*

Доказательство. Заметим сначала, что эйлерова характеристика двуугольника, а также всякого содержащегося в нем непустого выпуклого многоугольника, отличного от пары антиподов, равна 1 (проверьте это!).

Докажем, что из (а) следует (б). Пусть двуугольники $A_1$, $A_2$ и $A_3$ покрывают сферу $S$, и пусть $A_1 \cap A_2=\varnothing$. Обозначим через $v$ и $v'$ вершины двуугольника $A_1$, через $w$ и $w'$ — вершины $A_2$. По предположению все четыре точки $v$, $v'$, $w$ и $w'$ различны. Поэтому через них можно провести на $S$ единственную большую окружность $C$ (рис. 42). Тогда пересечение $A_1 \cap C$ состоит только из двух точек $v$ и $v'$. Действительно, в противном случае $A_1 \cap C$ содержало бы половину окружности $C$, а на этой половине лежит одна из вершин $w$ и $w'$, которая, следова-

тельно, содержалась бы в $A_1$, что невозможно. Итак, мы показали, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Так же проверяется, что пересечение каждой пары двуугольников непусто. Покажем еще, что это пересечение отлично от пары антиподов. Пусть, наоборот, $A_1 \cap A_2 = \{v, v'\} = \{w, w'\}$. В таком случае на $S$ можно провести большую окружность, которая с каждым из двуугольников $A_1$ и $A_2$ пересекается

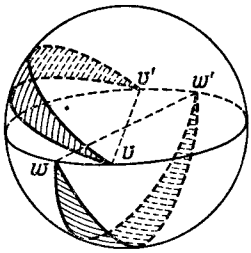



Рис. 42.

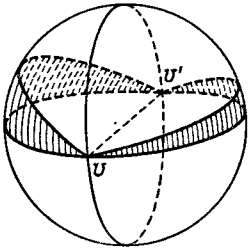



Рис. 43.

только по его вершинам $v$ и $v'$ (рис. 43). Но тогда все точки этой окружности, кроме $v$ и $v'$, должны содержаться в $A_3$, что невозможно.

Итак, если двуугольники $A_1$, $A_2$ и $A_3$ покрывают сферу, то пересечение каждых двух из них непусто и отлично от пары антиподов и поэтому имеет эйлерову характеристику, равную 1. Теперь имеем

$$2 = \chi(S) = \chi\left(\bigcup_{i=1}^{3} A_i\right) = \sum^{(1)} \chi(A_i) - \sum^{(2)} \chi(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \\ + \chi(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 3 - 3 + \chi(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Отсюда $\chi(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 2$, и, значит, это пересечение есть пара антиподов. Этим доказано, что из (а) следует (б).

Докажем теперь, что из (б) следует (а).

Пусть выполнено утверждение (б). Положим $A = \bigcup_{i=1}^{3} A_i$, тогда

$$\chi(A) = \sum^{(1)} \chi(A_i) - \sum^{(2)} \chi(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \chi(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \\ = 3 - 3 + 2 = 2.$$

Фигура $A$ связна, значит, $c(A) = 1$. Тогда из формулы (12.1) получаем $c^*(A) = 0$. Следовательно, $A$ покрывает сферу $S$. Теорема 5 доказана.

Следствие. *Наименьшее число двуугольников, покрывающих сферу, равно* 3.

### Задачи

**30.** Дайте пример элементарной фигуры в пространстве, для которой формула (12.1) неверна.

**31.** Пусть $A_1$, $A_2$, $A_3$ — выпуклые многоугольники на плоскости, из которых каждые два имеют непустое пересечение. Докажите, что если их объединение выпукло, то пересечение всех трех непусто.

**32.** Пусть $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ — выпуклые многоугольники на плоскости такие, что каждые три из них имеют общую точку. Используя равенство (12.1), докажите, что все многоугольники имеют общую точку.

Утверждение этой задачи является частным случаем теоремы, доказанной в 1913 г. австрийским математиком Э. Хеллн (1884—1943), см. книгу [2].

**33.** Пусть даны четыре выпуклых многоугольника на плоскости, причем пересечение каждых двух из них непусто, а объединение каждых трех имеет связное дополнение относительно плоскости. Докажите, что все многоугольники имеют общую точку.

**34.** Докажите формулу (12.1) для плоской фигуры, равной объединению конечного числа отрезков.

**35.** Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — отрезки на плоскости такие, что пересечение каждых двух из них непусто, а пересеченне каждых трех — пусто. На сколько частей они разбивают плоскость?

**36.** Пусть $A$ — плоская фигура, равная объединению $n$ штук отрезков. Докажите, что

$$\frac{n(3-n)}{2} \leqslant \chi(A) \leqslant n.$$

**37.** Пусть на сфере имеется пять строго выпуклых многоугольников, каждые три из которых имеют непустое пересечение. Докажите, что некоторые четыре из них тоже имеют непустое пересечение.

**38.** Докажите, что среди любых пятн (или большего числа) строго выпуклых многоугольников на сфере имеются четыре таких, которые не покрывают сферы.

**39.** Пусть отрезок $A$ покрыт «малыми» отрезками $A_1, \ldots, A_n$ *точечно-нечетно*, т. е. так, что каждая точка отрезка $A$ принадлежит нечетному числу малых отрезков. Докажите, что число $n$ нечетно.

Пользуясь этим, докажите, что если фигура $B$, лежащая на прямой, точечно-нечетно покрыта некоторым числом $n$ отрезков, то разность $n - \chi(B)$ четна.

**40.** Пусть окружность покрыта конечным числом коротких дуг точечно-нечетно. Докажите, что общее число дуг четно.

## РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ, ОТВЕТЫ

**1.** К обеим частям равенства $\Р - В = 1$ прибавьте 2В.

**2.** К обеим частям равенства $В - Р + Г = 1$ прибавьте 2Р.

**3.** Прямую с номером $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ проведите через точки плоскости с декартовыми координатами $(i, 0)$ и $(0, n-i)$. Найдите координаты точки пересечения каждой пары прямых. Выведите отсюда, что для различных пар прямых эти точки различны.

**4.** Так как каждые две прямые имеют общую точку, то $В = \frac{n(n-1)}{2}$. Ясно, что кратность каждой вершины равна 2. Поэтому из формул (1.3) и (1.4) получаем

$$Р = n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2,$$

$$Г = 1 + n - \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}.$$

**5.** Укажем, какие изменения появляются в доказательстве формулы (1.2), если, например, прямая $L_1$ семейства горизонтальна. Пусть на ней лежат $m$ вершин разбиения $A_1, \ldots, A_m$ с кратностями $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Найдем число новых вершин, ребер и граней, «возникающих» при прохождении движущейся прямой через $L_1$. Ясно, что число новых вершин равно $m$ — это точки $A_1, \ldots, A_m$. Число новых ребер равно $(m+1)+(\alpha_1-1)+\ldots$ $\ldots+(\alpha_m-1)$; из них $m+1$ ребер лежат на прямой $L_1$, $\alpha_1-1$ ребер имеют своим нижним концом точку $A_1$, $\alpha_2-1$ ребер имеют своим нижним концом точку $A_2$ и т. д. Число новых граней равно $(m+1)+(\alpha_1-2)+\ldots$ $\ldots+(\alpha_m-2)$; из них $m+1$ граней прилегают к прямой $L_1$ своими ребрами, $\alpha_1-2$ граней имеют своей самой нижней вершиной точку $A_1$, $\alpha_2-2$ граней имеют своей самой нижней вершиной точку $A_2$, и т. д. Поэтому изменение знакопеременной суммы $В - Р + Г$ при прохождении движущейся прямой через $L_1$ равно

$$m - [(m+1)+(\alpha_1-1)+\ldots+(\alpha_m-1)] + \\ +[(m+1)+(\alpha_1-2)+\ldots+(\alpha_m-2)] = 0.$$

В остальном доказательство не меняется.

**6.** Пусть семейство имеет $n$ прямых. Если $n=1$, то $В=0$, $Р=1$, $Г=2$, и поэтому $В - Р + Г = 1$. Предположим, что эта формула доказана для всех семейств, состоящих из $n-1$ прямых общего положения. Добавим к такому семейству новую прямую $L$. Так как она пересекается со всеми остальными прямыми, то число новых вершин равно $n-1$. Число новых ребер равно $n+(n-1)$ (из них $n$ лежат на прямой $L$, а остальные $n-1$ — по одному на каждой из остальных прямых). Так как прямая $L$ делится остальными прямыми на $n$ частей, то она пересекает $n$ старых

граней и каждую из них делит на две части. Значит, число новых граней равно $n$. Поэтому при добавлении прямой $L$ изменение суммы $В-Р+Г$ равно $(n-1)-[n+(n-1)]+n=0$.

**7.** Если разбиение плоскости образовано семейством из $n$ прямых и имеет вершины, то каждая прямая этого семейства пересекается с какой-то другой прямой. Поэтому на каждой прямой имеется два луча, т. е. неограниченных ребра. Иными словами, $Р_2=2n$. Проведем на плоскости окружность столь большого радиуса, чтобы все ограниченные грани и ребра лежали внутри нее. Тогда при движении по этой окружности мы будем попеременно встречать неограниченные грани и неограниченные ребра. Это значит, что $Г_2=2n$. Из формул (1.3) и (1.4) получаем

$$Р_1=Р-Р_2=-n+\sum_{i=1}^{В}\alpha_i, \quad Г_1=Г-Г_2=1-n-В+\sum_{i=1}^{В}\alpha_i.$$

Отсюда сразу следует формула $В-Р_1+Г_1=1$.

**8.** Разбиение плоскости, осуществляемое семейством прямых, тогда и только тогда имеет ограниченные грани, когда семейство содержит тройку прямых общего положения или четверку прямых, являющихся продолжениями сторон параллелограмма. Ограниченные ребра имеются тогда и только тогда, когда семейство содержит тройку прямых общего положения или тройку прямых, являющихся продолжениями трех сторон параллелограмма.

**9.** Пусть $x$ и $y$ — две точки из $M$, причем $x$ лежит в ограниченной грани $M_1$, а $y$ — в ограниченной грани $M_2$. Обе эти грани — выпуклые многоугольники. Так как $M_1$ и $M_2$ ограничены, то найдутся такие *пересекающиеся* прямые $L_1$ и $L_2$, что $L_1$ является продолжением некоторой стороны $M_1$, а $L_2$ — продолжением стороны $M_2$. Если точка $x$ лежит *внутри* $M_1$, то опустим из нее перпендикуляр на какую-нибудь сторону $M_1$, и аналогично для $y$. Теперь легко построить ломаную, соединяющую точки $x$ и $y$: она состоит из отрезков указанных перпендикуляров, некоторых частей границ $M_1$ и $M_2$ и двух отрезков, лежащих на прямых $L_1$ и $L_2$ соответственно. Итак, фигура $M$ связна и поэтому является многоугольником.

Граница фигуры $M$ является замкнутой ломаной $N$. Занумеруем ее вершины $A_1, \ldots, A_n$, выбрав произвольное направление обхода. Пусть $N$ имеет точку самопересечения, т. е. пусть, например, $A_1=A_m=A_n$, где $1<m<n$. Можно считать, что $3<m<n-2$, и что $m$ — наименьшее из тех чисел $k$ $(3<k<m-2)$, для которых $A_k=A_n$. Тогда $A_1A_2\ldots A_{m-1}A_m$ — контур, ограничивающий простой многоугольник $M_1$, содержащийся в $M$. Предположим еще, что три точки $A_{m-1}$, $A_1=A_m$, $A_{m+1}$ лежат на одной прямой в указанном порядке, и аналогично — для точек $A_{n-1}$, $A_n=A_1$, $A_2$.

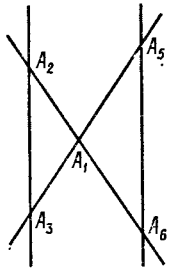


Рис. 44.

Докажем от противного, что $m=4=n-3$. Пусть, например, $m>4$. Тогда существуют две прямые семейства, не проходящие через $A_1$: прямая $L_1$, проходящая через $A_2$, и прямая $L_2$, проходящая через $A_{m-1}$. Рассмотрим еще прямую семейства $L_3$, проходящую через $A_{m+1}$, но не через $A_1$. Она пересекается по крайней мере с одной из прямых $L_1$ и $L_2$, пусть с $L_1$, в точке $A$. Замкнутая ломаная $A_1A_2AA_{m+1}A_1$ ограничивает некоторый многоугольник $M_2$, лежащий в $M$. Рассмотрим углы $A_2A_1A_{m-1}$ и $A_2A_1A_{m+1}$. Они являются внутренними для многоугольников $M_1$ и $M_2$ соответствен-

но и смежными между собой. Поэтому отрезок $A_1A_2$ пересекается с внутренностью многоугольника $M$, что невозможно. Итак, $m=4$ и аналогично $n-3=4$, т. е. $n=7$. При этом прямые $A_2A_3$ и $A_5A_6$ параллельны, ибо иначе, обозначив их через $L_1$ и $L_3$, можно повторить рассуждение.

Таким образом, если граница $M$ имеет точку самопересечения, то сам $M$ имеет вид, изображенный на рис. 44, где $A_1=A_4=A_7$. Заметим, что треугольники $A_1A_2A_3$ и $A_1A_5A_6$ не обязательно являются гранями разбиения, так как в семействе могут быть прямые, параллельные $A_2A_3$ и $A_5A_6$ и расположенные между ними.

**11.** Доказываем от противного: пусть все углы всех граней $<2\pi/5$. Тогда все грани — треугольники, ибо при $n\geqslant 4$ наибольший угол $n$-угольника не меньше, чем $\frac{(n-2)\pi}{n}\geqslant\frac{\pi}{2}$. Пусть $\Gamma$ — общее число граней и $P_1$ — число внутренних ребер. Так как все грани являются треугольниками, то

$$\Gamma\leqslant\frac{2}{3}\ P_1. \tag{P.1}$$

Из предположения следует, что к каждой внутренней вершине примыкает $\geqslant 6$ ребер. Поэтому, если $B_1$ — число внутренних вершин, то

$$B_1\leqslant\frac{2}{6}\ P_1=\frac{1}{3}\ P_1. \tag{P.2}$$

Из формулы Эйлера $(B_1+5)-(P_1+5)+\Gamma=1$, а также неравенств (P.1) и (P.2) получаем

$$\frac{1}{3}P_1-P_1+\frac{2}{3}P_1\geqslant 1,$$

что невозможно.

**13.** Если полный граф с пятью вершинами вкладывается в плоскость, то на плоскости получается простой многоугольник $M$, разбитый на грани, которые тоже являются простыми многоугольниками. По условию имеется 5 вершин и $\frac{5(5-1)}{2}=10$ ребер разбиения. Применим формулу Эйлера в следующем виде: $B-P+\Gamma=2$, где в число граней включено дополнение $M$ относительно плоскости, или — неограниченная «грань». Отсюда $\Gamma=7$. Так как две вершины графа могут соединяться только одним его ребром, то на границе каждой (в том числе неограниченной) грани имеется не меньше трех ребер. Поэтому $3\Gamma\leqslant 2P$; отсюда $\Gamma\leqslant\frac{2}{3}P=\frac{20}{3}<7$.

**14.** Неравенство (5.10) получается из формулы Пика (5.1) с учетом неравенства $L\geqslant b$. Если многоугольник разбит на квадраты, то $L=b$.

**15.** Первая формула доказывается так же, как формула (5.7), с учетом того, что теперь площадь примитивного треугольника равна $\frac{1}{8}$. Вторая — следует из первой и из (5.7) исключением членов $-\chi(M)+\frac{1}{2}\chi(\partial M)$.

**17.** Выберем такие вершины $v_1, \ldots, v_n$ многогранника $X$, расположенные на разной высоте и занумерованные в порядке ее возрастания, чтобы высота каждой остальной вершины совпала с высотой одной из этих выбранных вершин. Рассмотрим сумму $S(h)=\mathrm{B}(h)-\mathrm{P}(h)+\Gamma(h)$, где $\mathrm{B}(h)$ — число вершин многогранника, уже встреченных движущейся плоскостью $Q$ в момент, когда она находится на расстоянии $h$ от своего начального положения (и аналогично для $\mathrm{P}(h)$ и $\Gamma(h)$). Сумма $S(h)$ может изменяться только при прохождении $Q$ через вершины $v_1, \ldots, v_n$. Когда $v_1$ лежит в $Q$, то пересечение $Q \cap \partial X$ является гранью, или ребром, или вершиной; отсюда заключаем, что в этот момент $S(h)=1$. Такой же вид имеет пересечение $Q \cap \partial X$ в момент, когда $v_n$ лежит в $Q$; отсюда следует, что при прохождении $Q$ через $v_n$ сумма $S(h)$ увеличивается на 1. Когда $Q$ проходит через вершину $v_i$, у которой $2 \leqslant i \leqslant n-1$, то все ребра и вершины многогранника $X$, лежащие в этот момент в плоскости $Q$, образуют либо простой контур, либо одну или несколько простых незамкнутых ломаных (возможно, вырождающихся в вершины). Пусть, например, при прохождении $Q$ через вершину $v_2$ в плоскости $Q$ лежит незамкнутая ломаная $C$, имеющая $\alpha$ ребер и $\beta$ вершин. Тогда $\beta=\alpha+1$. Далее, пусть от этой ломаной выходят вверх $\gamma$ ребер и $\delta$ граней. Тогда $\delta=\gamma+1$. Поэтому при прохождении $Q$ через $v_2$ сумма $S(h)$ изменяется на $\beta-(\alpha+\gamma)-\delta=(\alpha+1)-(\alpha+\gamma)-(\gamma+1)=0$, т. е. сохраняет свое значение. Если ломаная $C$ замкнута, то $\beta=\alpha$ и $\delta=\gamma$, и $S(h)$ опять не меняется. Так будет при прохождении $Q$ через все вершины $v_i$, $2 \leqslant i \leqslant n-1$. Поэтому $\chi(\partial X)=2$.

**18.** Из условия задачи, формулы Эйлера и соотношений (7.10) и (7.11) последовательно получаем

$$\mathrm{P}=\frac{\mathrm{B}(\mathrm{B}-1)}{2}, \quad \Gamma=2-\mathrm{B}+\mathrm{P}, \quad 3\Gamma \leqslant 2\mathrm{P}.$$

Отсюда

$$3\left[2-\mathrm{B}+\frac{\mathrm{B}(\mathrm{B}-1)}{2}\right] \leqslant \mathrm{B}(\mathrm{B}-1),$$

или

$$\mathrm{B}^2-7\mathrm{B}+12 \leqslant 0.$$

Среди целых чисел решениями этого неравенства являются только $\mathrm{B}=3$ и $\mathrm{B}=4$. Так как многогранник не может иметь три вершины, то $\mathrm{B}=4$, т. е. многогранник является тетраэдром.

**19.** Формулировка утверждения: если каждые две грани многогранника имеют общую сторону, то сам многогранник — тетраэдр.

**20.** Пусть число перемен знаков вокруг каждой вершины не меньше 4. Пусть $N$ обозначает сумму этих чисел, взятую по всем вершинам. По предположению имеем

$$N \geqslant 4\mathrm{B}. \tag{Р.3}$$

Рассмотрим еще число перемен знаков при обходе границы каждой грани и сумму всех таких чисел. Так как одна перемена знака связана только с одной парой ребер, имеющих общую вершину и отмеченных разными знаками, то общее число перемен при обходе всех граней равно общему числу перемен при обходе всех вершин, т. е. равно $N$. Число перемен знаков при обходе $m$-угольной грани, очевидно, четно и не превосходит $m$; поэтому

$$N \leqslant 4\Gamma_4+4\Gamma_5+6\Gamma_6+6\Gamma_7+\ldots \tag{Р.4}$$

Используя неравенства (Р.3) и (Р.4), а также формулы (7.1) и (7.10),

получаем

$$4B \leqslant N \leqslant 4\Gamma_4 + 4\Gamma_5 + 6\Gamma_6 + 6\Gamma_7 + \ldots \leqslant$$
$$\leqslant 2\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 4\Gamma_5 + 6\Gamma_6 + 6\Gamma_7 + \ldots =$$
$$= 2(3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + \ldots) - 4(\Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \ldots) = 4P - 4\Gamma = 4B - 8,$$

что невозможно.

Двойственное утверждение: имеется такая грань многогранника, при обходе вокруг которой число перемен знаков не больше 2.

**21.** Из неравенства $3\Gamma \leqslant 2P$ следует $P \geqslant 15/2$, т. е. $P \geqslant 8$. Из формулы Эйлера получаем $B = P - 3$. Тогда двойственное неравенство $3B \leqslant 2P$ дает: $3(P-3) \leqslant 2P$, или $P \leqslant 9$. Итак, допустимы только два значения: $P = 8$ и $P = 9$. В первом случае из формулы Эйлера получаем $B = 5$, во втором $B = 6$. Многогранник, у которого $\Gamma = 5$, $P = 8$, $B = 5$, существует; это — четырехугольная пирамида. Многогранником, у которого $\Gamma = 5$, $P = 9$, $B = 6$, является, например, треугольная призма.

Двойственная задача: выпуклый многогранник имеет 5 вершин; каким может быть число его граней и число его ребер?

**22.** В формуле $2B - 2P + 2\Gamma = 4$ заменим все члены левой части, пользуясь равенствами (7.7), (7.9) и (7.8):

$$2\sum_{i \geqslant 3} B_i - \sum_{i \geqslant 3} iB_i + 2\sum_{i \geqslant 3} \Gamma_i = 4. \qquad (P.5)$$

Умножим обе части (P.5) на $n$ и сложим полученное равенство почленно с

$$2\sum_{i \geqslant 3} iB_i - 2\sum_{i \geqslant 3} i\Gamma_i = 0.$$

Тогда

$$\sum_{i \geqslant 3} (2n - ni + 2i) B_i + 2\sum_{i \geqslant 3} (n-i)\Gamma_i = 4n.$$

**23.** Сопоставим каждой вершине каждой грани многогранника число $1/3$ в качестве ее «веса». Тогда сумма весов, взятая по всем граням и всем их вершинам, равна B, т. е. числу вершин многогранника. Из условий задачи и неравенства (7.13) следует, что многогранник имеет пятиугольные грани. Найдем сумму весов, распространенную на все вершины пяти- и шестиугольных граней. Предположим, что ни одна пятиугольная грань не касается ни пятиугольной, ни шестиугольной грани. Ввиду этого предположения указанная сумма, взятая по всем пятиугольным граням, равна $\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 5\Gamma_5 = 5\Gamma_5$. Но шестиугольные грани могут касаться друг друга. Поэтому соответствующая им сумма равна $\frac{1}{3} \cdot 6\Gamma_6 = 2\Gamma_6$. Поэтому получаем

$$5\Gamma_5 + 2\Gamma_6 < B, \qquad (P.6)$$

причем неравенство строгое, так как здесь учтены не все веса вершин $n$-угольных граней при $n \geqslant 7$. С другой стороны, равенство (7.16) при $n = 7$ и $B = B_3$ дает

$$4\Gamma_5 + 2\Gamma_6 - 2\Gamma_8 - 4\Gamma_9 - \ldots = 28 + B,$$

или

$$4\Gamma_5 + 2\Gamma_6 \geqslant 28 + B,$$

что противоречит (P.6).

**24.** 6.

**25.** 166.

**26.** Эйлерова характеристика фигуры равна 1.

**27.** Эйлерова характеристика фигуры равна

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+\binom{n}{3}-\ \cdots\ +(-1)^{n+1}\binom{n}{n}=1$$

**28.** При любом разбиении сферы на строго выпуклые многоугольные грани выполняются все соотношения, выведенные в § 7. Поэтому из неравенства (7.13) следует, в частности, что мяч нельзя сшить только из шестиугольных кусков.

**29.** Такая точка существует. Действительно, если бы через каждую точку пересечения двух больших окружностей проходила третья большая окружность, то (с учетом условия задачи) мы получили бы разбиение сферы на строго выпуклые грани, причем каждая вершина этого разбиения имела бы степень $\geqslant 6$, а это противоречит неравенству (7.14).

**30.** Такой фигурой является, например, граница любого выпуклого многогранника.

**31.** Положим $A=\bigcup\limits_{i=1}^{3} A_i$, $B=\bigcap\limits_{i=1}^{3} A_i$. Тогда $\chi(A)=3-3+\chi(B)=$ $=\chi(B)$. Из условия имеем $\chi(A)=1$, поэтому $\chi(B)=1$, а отсюда сразу следует нужное утверждение.

**32.** Положим $A=\bigcup\limits_{i=1}^{4} A_i$, $B=\bigcap\limits_{i=1}^{4} A_i$. Тогда

$$\chi(A)=\binom{4}{1}-\binom{4}{2}+\binom{4}{3}-\chi(B)=2-\chi(B).$$

Нам требуется доказать, что $B\neq\varnothing$. Для этого достаточно проверить, что $\chi(B)\neq 0$. Предположим противное: пусть $\chi(B)=0$, тогда $\chi(A)=2$. Так как каждые два многоугольника имеют общую точку, то фигура $A$ связна; следовательно, $c(A)=1$, и из формулы (12.1) получаем $c^*(A)=0$. Последнее равенство означает, что $A$ совпадает с плоскостью. Но это невозможно: фигура $A$ ограничена, а плоскость — нет.

**33.** Пусть заданы многоугольники $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$. Докажем, что пересечение каждых трех из них непусто, и тогда нужное утверждение следует из предыдущей задачи. Положим $A=\bigcup\limits_{i=1}^{3} A_i$, $B=\bigcap\limits_{i=1}^{3} A_i$. Тогда, как и в задаче 31, $\chi(A)=\chi(B)$. По условию $c(A)=1$ и $c^*(A)=1$ Поэтому из формулы (12.1) имеем $\chi(A)=1$, и поэтому $\chi(B)=1$. Значит, $B\neq\varnothing$. Аналогично проверяется, что пересечение всех троек многоугольников непусто.

**35.** На $\frac{1}{2}(n^2-3n+4)$ частей.

**36.** Положим $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, где $A_i$ — отрезки. Так как $c(A)\leqslant n$ и $c^*(A)\geqslant 1$, то из формулы (12.1) получаем $\chi(A)\leqslant n$. Левое неравенство доказывается индукцией по числу отрезков $n$. При $n=1$ это неравенство очевидно. Пусть оно доказано для всех $n\leqslant m$. Докажем его для

$n=m+1$. Пусть $B=\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i$. По предположению имеем $\chi\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)\geqslant$ $\geqslant\frac{m(3-m)}{2}$, тогда

$$\chi(B)=\chi\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)+\chi(A_{m+1})-\chi\left[A_{m+1}\cap\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)\right]\geqslant$$

$$\geqslant\frac{m(3-m)}{2}+1-\chi\left[\bigcup_{i=1}^{m}(A_{m+1}\cap A_i)\right]$$

Учитывая, что $\chi\left[\bigcup_{i=1}^{m}(A_{m+1}\cap A_i)\right]\leqslant m$, получаем

$$\chi(B)\geqslant\frac{m(3-m)}{2}+1-m=\frac{(m+1)|3-(m+1)|}{2}.$$

**37.** Пусть заданы строго выпуклые многоугольники $A_1$, $A_2$, ..., $A_5$. Предположим, что каждые четыре из них имеют пустое пересечение. По теореме 3 каждые четыре многоугольника, а следовательно, и все пять покрывают сферу $S$; тогда

$$2=\chi(S)=\binom{5}{1}-\binom{5}{2}+\binom{5}{3}=5.$$

Полученное противоречие доказывает нужное утверждение.

**38.** Пусть каждые четыре многоугольника покрывают сферу $S$. Тогда по теореме 3 каждые три из них имеют непустое пересечение, а каждые четыре — пустое. Пусть всего имеется $m$ многоугольников ($m\geqslant 5$), тогда

$$2=\chi(S)=\binom{m}{1}-\binom{m}{2}+\binom{m}{3}=1+\binom{m-1}{3}.$$

Отсюда $\binom{m-1}{3}=1$, или $m=4$, что невозможно.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология.— М.: Наука, 1982, 160 с. (Б-чка «Квант», вып. 21.)
2. Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли.— М.: Мир, 1968, 160 с.
3. Кушниренко А. Г. Целые точки в многоугольниках и многогранниках.— Квант, 1977, № 4, с. 13—20.
4. Люстерник Л. А. Выпуклые фигуры и многогранники.— М.: Гостехтиздат, 1956, 212 с.
5. Хадвигер Г., Дебруннер Г. Комбинаторная геометрия плоскости.— М.: Наука, 1965, 172 с.
6. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии.— М.: Наука, 1974, 384 с. (Б-ка матем. кружка; вып. 13.)
7. Яглом И. М. Заплаты на кафтане.— Квант, 1974, № 2, с. 13—21

## СОДЕРЖАНИЕ


Предисловие . . . . . 3
§ 1. Формулы Эйлера для прямой и плоскости . . . . . 5
§ 2. Что такое эйлерова характеристика? . . . . . 11
§ 3. Эйлерова характеристика многоугольников . . . . . 19
§ 4. Эйлерова характеристика и сумма внешних углов многоугольника . . . . . 30
§ 5. Применение эйлеровой характеристики к вычислению площадей . . . . . 34
§ 6. Формула Эйлера для пространства . . . . . 40
§ 7. Формула Эйлера для выпуклых многогранников и ее следствия . . . . . 45
§ 8. Аксиомы эйлеровой характеристики . . . . . 53
§ 9. Доказательство существования эйлеровой характеристики 61
§ 10. Равносильность двух определений эйлеровой характеристики 66
§ 11. Элементарные фигуры на сфере и их эйлеровы характеристики . . . . . 76
§ 12. Дальнейшие применения эйлеровой характеристики . . . 80
Решения, указания, ответы . . . . . 87
Литература . . . . . 94

*Юрий Алексеевич Шашкин*

ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА

(Серия «Популярные лекции по математике»)

Редактор *В. Ф. Пахомов*

Техн. редактор *А. П. Колесникова*

Корректоры *Т. С. Вайсберг, Л. С. Сомова*

ИБ № 12420

Сдано в набор 24.01.84. Подписано к печати 26.09.84. Формат 84×108 1/32. Бумага тип. № 2. Литературная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 5,04. Усл. кр.-отт. 5,25. Уч.-изд. л. 5,06. Тираж 70 000 экз. Заказ № 68. Цена 15 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

## ОПЕЧАТКИ

| Номер стр. строки | Как отпечатано | Как должно быть |
|---|---|---|
| стр. 71 5 строка сверху | $\chi G = P - \binom{2}{2} B_2 + \left[-\binom{3}{2} + \binom{3}{3}\right] B_3 + \ldots + \left[-\binom{i}{2} +$ | $\chi(G) = P - \binom{2}{2} B_2 + \left[-\binom{3}{2} + \binom{3}{3}\right] B_3 + \ldots + \left[-\binom{i}{2} +$ |
| стр. 71 7 строка сверху | $\ldots + \left[-\binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n-1} + (-1)^{n+1} \binom{n}{n}\right] B_n$ | $\ldots + \left[-\binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n-1} + (-1)^{n+1} \binom{n}{n}\right] B_n.$ |
| стр. 71 9 строка сверху | $\chi G) = P - B_2 - 2B_3 - \ldots - (i-1) B_i - \ldots - (n-1 B_n.$ | $\chi(G) = P - B_2 - 2B_3 - \ldots - (i-1) B_i - \ldots - (n-1) B_n.$ |
| стр. 74 5 строка сверху | $+\left[\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + +-1)^n \binom{n}{n}\right] B_n.$ | $+\left[\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n}\right] B_n.$ |

15 коп.

## ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. **А. И. Маркушевич.** Возвратные последовательности.
Вып. 2. **И. П. Натансон.** Простейшие задачи на максимум и минимум.
Вып. 3. **И. С. Соминский.** Метод математической индукции.
Вып. 4. **А. И. Маркушевич.** Замечательные кривые.
Вып. 5. **П. П. Коровкин.** Неравенства.
Вып. 6. **Н. Н. Воробьев.** Числа Фибоначчи.
Вып. 7. **А. Г. Курош.** Алгебраические уравнения произвольных степеней.
Вып. 8. **А. О. Гельфонд.** Решение уравнений в целых числах.
Вып. 9. **А. И. Маркушевич.** Площади и логарифмы.
Вып. 10. **А. С. Смогоржевский.** Метод координат.
Вып. 11. **Я. С. Дубнов.** Ошибки в геометрических доказательствах.
Вып. 12. **И. П. Натансон.** Суммирование бесконечно малых величин.
Вып. 13. **А. И. Маркушевич.** Комплексные числа и конформные отображения.
Вып. 14. **А. И. Фетисов.** О доказательствах в геометрии.
Вып. 15. **И. Р. Шафаревич.** О решении уравнений высших степеней.
Вып. 16. **В. Г. Шерватов.** Гиперболические функции.
Вып. 17. **В. Г. Болтянский.** Что такое дифференцирование?
Вып. 18. **Г. М. Миракьян.** Прямой круговой цилиндр.
Вып. 19. **Л. А. Люстерник.** Кратчайшие линии.
Вып. 20. **А. М. Лопшиц.** **Вычисление площадей ориентированных фигур.**
Вып. 21. **Л. И. Головина и И. М. Яглом.** Индукция в геометрии.
Вып. 22. **В. Г. Болтянский.** Равновеликие и равносоставленные фигуры.
Вып. 23. **А. С. Смогоржевский.** О геометрии Лобачевского.
Вып. 24. **Б. И. Аргунов и Л. А. Скорняков.** Конфигурационные теоремы.
Вып. 25. **А. С. Смогоржевский.** Линейка в геометрических построениях.
Вып. 26. **Б. А. Трахтенброт.** Алгоритмы и машинное решение задач.
Вып. 27. **В. А. Успенский.** Некоторые приложения механики к математике.
Вып. 28. **Н. А. Архангельский и Б. И. Зайцев.** Автоматические цифровые машины.
Вып. 29. **А. Н. Костовский.** Геометрические построения одним циркулем.
Вып. 30. **Г. Е. Шилов.** Как строить графики.
Вып. 31. **А. Г. Дорфман.** Оптика конических сечений.
Вып. 32. **Е. С. Вентцель.** Элементы теории игр.
Вып. 33. **А. С. Барсов.** Что такое линейное программирование.
Вып. 34. **Б. Е. Маргулис.** Системы линейных уравнений.
Вып. 35. **Н. Я. Виленкин.** Метод последовательных приближений.
Вып. 36. **В. Г. Болтянский.** Огибающая.
Вып. 37. **Г. Е. Шилов.** Простая гамма (устройство музыкальной шкалы).
Вып. 38. **Ю. А. Шрейдер.** Что такое расстояние?
Вып. 39. **Н. Н. Воробьев.** Признаки делимости.
Вып. 40. **С. В. Фомин.** Системы счисления.
Вып. 41. **Б. Ю. Коган.** Приложение механики к геометрии.
Вып. 42. **Ю. И. Любич и Л. А. Шор.** Кинематический метод в геометрических задачах.
Вып. 43. **В. А. Успенский.** Треугольник Паскаля.
Вып. 44. **И. Я. Бакельман.** Инверсия.
Вып. 45. **И. М. Яглом.** Необыкновенная алгебра.
Вып. 46. **Н. М. Соболь.** Метод Монте-Карло.
Вып. 47. **Л. А. Калужнин.** Основная теорема арифметики.
Вып. 48. **А. С. Солодовников.** Системы линейных неравенств.
Вып. 49. **Г. Е. Шилов.** Математический анализ в области рациональных функций.
Вып. 50. **В. Г. Болтянский. И. Ц. Гохберг.** Разбиение фигур на меньшие части.
Вып. 51. **Н. М. Бескин.** Изображения пространственных фигур.
Вып. 52. **Н. М. Бескин.** Деление отрезка в данном отношении.
Вып. 53. **Б. А. Розенфельд и Н. Д. Сергеева.** Стереографическая проекция.
Вып. 54. **В. А. Успенский.** Машина Поста.
Вып. 55. **Л. Бераи.** Упорядоченные множества.
Вып. 56. **С. А. Абрамов.** Элементы программирования.
Вып. 57. **В. А. Успенский.** Теорема Гёделя о неполноте.
Вып. 58. **Ю. А. Шашкин.** Эйлерова характеристика.